

[RESSOURCES MATHÉMATIQUES]

FRANÇOIS NICOLAS : *LE CONCEPT MATHÉMATIQUE D'ÉMERGENCE*

Pour éclairer **mathématiquement** la notion d'**émergence**, je repartirai d'une leçon de mathématiques dispensée il y a dix ans dans le cadre des séances *Qui-vive* coorganisées avec Rudolf di Stefano au ciné 104 de Pantin de 2012 à 2016 : *La notion d'émergence, éclairée par un théorème d'A. Ehresmann (1996)* ¹

Une question

À quelles conditions une nouvelle structure peut-elle émerger sur la base d'une première structure ? Non pas comment une nouvelle structure peut-elle remplacer une structure ancienne, mais plutôt comment peut-elle s'y superposer et s'y intriquer de manière (relativement) autonome ? Autrement dit, comment une **superstructure** peut-elle émerger au-dessus d'une **infrastructure** ?

Cette question, abstraitement formulée, peut se décliner de bien des façons.

- Pensons au marxisme traditionnel qui stratifiait infrastructure socio-économique et superstructure idéologico-politique.
- Pensons à la manière dont une conscience individuelle peut émerger dans un cerveau sur la base des échanges neuronaux.
- Pensons à ces phénomènes proprement collectifs – groupes, foules, équipes, organisations... - dont la logique propre émerge sur la base de comportements individuels.

À chaque fois, la notion d'émergence va reposer sur l'idée que l'ordre supérieur n'est pas transitif à l'ordre inférieur, n'est pas réductible à la combinaison de ce qui se passe en-dessous : on ne peut plus comprendre les phénomènes de la superstructure collective par simple décomposition dans son infrastructure. ²

Comme nous allons le voir, il en va ici d'une conception de l'émancipation par intrication d'un niveau supérieur, d'une nouvelle échelle, non par détachement du niveau inférieur.

Un lexique...

Fixons-nous un petit lexique : on dira que les acteurs de l'infrastructure sont des **individus** et que ceux de la superstructure sont des **collectifs**.

Dire qu'un ordre propre émerge dans la superstructure, c'est dire que les rapports entre collectifs peuvent être (relativement) autonomes des rapports entre individus. Et dire qu'ils sont **autonomes**, c'est dire non seulement qu'ils sont différents mais qu'ils ne se composent pas comme les premiers, qu'on ne peut déduire les rapports entre **collectifs** à partir des rapports entre **individus** (constituant les collectifs en question).

- Par exemple, bien des rapports entre deux équipes sportives ne seront plus intelligibles par décomposition de ces équipes en leurs ensembles d'individus mais procèderont d'une logique de groupe,

¹ *Qui-vive*, 26 septembre 2013 – Ciné 104 de Pantin. Cette leçon est parue dans la revue *Quadrature* n°106 (octobre-novembre-décembre 2017) : <http://www.quadrature.info/produit/numero-106/>

² La notion d'émergence vient ainsi barrer la méthode cartésienne de **réduction** consistant à décomposer un problème en constituants simples : comme on va le voir, la superstructure émergente n'est pas intelligible par simple décomposition en éléments de l'infrastructure.

non réductible à la combinaison de comportements individuels.

- De même bien des rapports entre différents phénomènes de conscience *dans le même cerveau* ne seront plus intelligibles comme simples rapports entre zones neuronales concernées : les phénomènes de conscience conserveront bien leur base neuronale mais leur logique propre ne sera plus analysable selon une simple logique neuronale.

La notion d'émergence vient ainsi fixer une (relative) **séparation** entre ordres hiérarchiquement corrélés : la superstructure a beau être l'affaire de collectifs constitués d'individus, les rapports entre ces collectifs s'émancipent des rapports entre individus pour composer un nouvel espace doté de sa logique (relativement) autonome.

Notre question va être : dans quelles conditions une telle émergence peut-elle se produire ?

Nous traiterons ici d'une seule d'entre elles : une **condition nécessaire** pour qu'il puisse y avoir un tel type d'émergence, une condition que la mathématique contemporaine vient clarifier sous la forme d'un théorème dû à Andrée Ehresmann.

Un théorème

Ce théorème est récent – il date de 1996 – et il est l'œuvre ³ d'une mathématicienne française ⁴ spécialisée dans la théorie des catégories.

Présentons ici son idée directrice sans entrer dans son détail technique, au demeurant intuitivement accessible.

Formulations et formalisation

Techniquement formulé, ce théorème dit très exactement ceci (en la langue technique de la mathématique concernée) :

« Dans une catégorie hiérarchique, le Principe de Multiplicité est une condition nécessaire pour qu'il existe des objets d'ordre de complexité strictement supérieur à 1. »

Reformulons cela dans notre lexique : pour que les relations superstructurelles entre collectifs soient (relativement) émancipées des relations infrastructurelles entre individus, il faut qu'il y ait des collectifs qui collectivisent, sous le même nom, des groupes entièrement différents et disjoints d'individus ; il faut que des groupes, entièrement indépendants dans l'infrastructure, soient « représentés », dans la superstructure, par un même (super)-élément.

Formalisons tout ceci.

Partons d'une situation de départ – notre future *infrastructure* – faite d'individus reliés entre eux par différents rapports ⁵.

Admettons que, dans cette situation, **toute partie a un élément qui va la représenter** : disons un élément qui exemplifie les propriétés communes aux différents éléments de cette partie, un élément spécifié qui concentre le trait différenciant cette partie de tout autre – pour suivre la métaphore sportive, une sorte de capitaine d'équipe, témoignant exemplairement des qualités sportives propres à cette équipe. Appelons cet élément-phare qui résume la partie concernée son élément-*limite* ⁶.

Construisons maintenant **une nouvelle situation** qui ne sera composée que de ces éléments-limites et de leurs rapports réciproques – dans notre image sportive, un rassemblement des capitaines d'équipe. Ce sera là notre nouvelle *superstructure*.

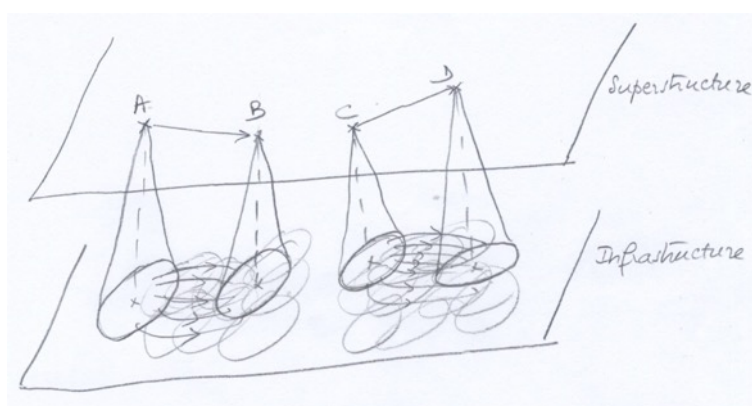
Dessignons ainsi cette superposition hiérarchique – l'infrastructure est en bas et la superstructure s'édifie *sur* cette base :

³ en collaboration avec un médecin biologiste J.-P. Vanbremeersch

⁴ Andrée Ehresmann, née Andrée Bastiani (1935)

⁵ Ils sont normalement orientés, mais on peut, à notre niveau élémentaire, négliger dans un premier temps ce point.

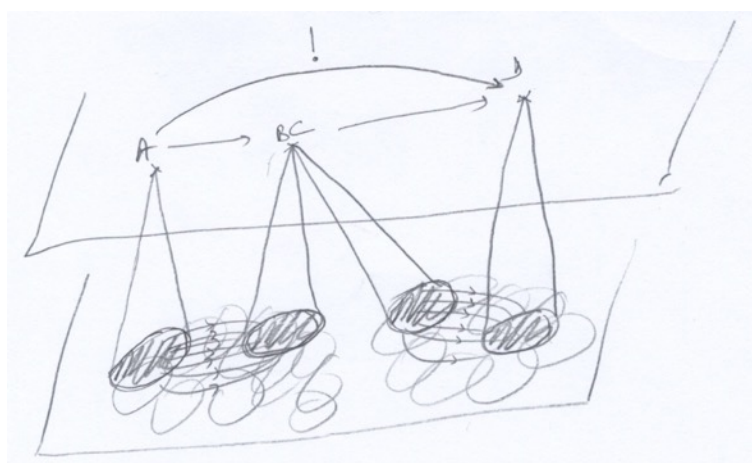
⁶ ou *colimite*, mais on ne rentrera pas ici dans cette distinction (qui renvoie à l'orientation des rapports – « morphismes » - concernés).



A priori, les relations superstructurelles entre éléments-limite restent **décomposables** selon les relations infrastructurelles qu'entretiennent les éléments concernés. Ainsi, dans notre schéma, les éléments-limites A et B sont reliés (dans la superstructure) car leurs bases collectives le sont (dans l'infrastructure) ; tout de même pour C et D. Par contre, A et B d'un côté, C et D de l'autre sont ici sans rapport (dans la superstructure) car leurs bases respectives sont sans rapports (dans l'infrastructure).

A priori donc, la superstructure reste **transitive** à l'infrastructure puisque les relations d'en-haut restent décomposables et analysables dans des relations d'en-bas.⁷

Ce que nous dit alors notre théorème, c'est que la situation change du tout au tout s'il se trouve des éléments-limite qui se trouvent être limite à la fois de deux parties entièrement disjointes dans l'infrastructure, ce qui pourra se dessiner ainsi :



Les éléments B et C sont ici devenus **confondus** (dans la superstructure) alors même que leurs bases collectives sont restées **disjointes** (dans l'infrastructure).

Imaginez pour cela un rassemblement des 50.000 personnes qui en France aiment à se parer du titre de *Président* (cela va du Président de la République au Président d'un quelconque conseil syndical) et imaginez qu'une même personne de ce rassemblement se trouve, par le plus grand hasard, être deux fois présidents, plus précisément être simultanément président de deux collectifs sans aucuns rapports entre eux : par exemple président d'un immeuble d'un côté et président d'une association 1901 à l'autre bout du pays. Voilà un exemple de ce qu'on appellera un élément-limite *polyvalent* ou, pour parler comme le théorème, un élément-limite *multiple*.⁸

Que se passe-t-il alors ? Il se passe que le réseau des relations superstructurelles entre éléments-limites va ipso facto se trouver doté de relations spécifiques qui n'auront plus d'équivalent strict dans l'infrastructure.

Ainsi, dans notre diagramme précédent, non seulement dans la superstructure, A reste relié à BC (par

⁷ On se trouve donc ici dans une organisation intelligible selon les principes cartésiens de *réduction* par décomposition en éléments simples.

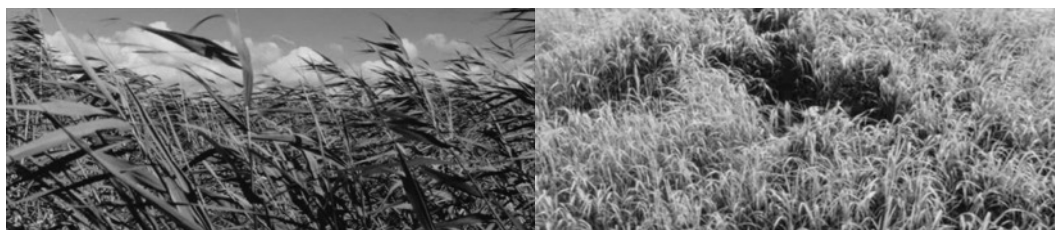
⁸ Le même élément de la superstructure est limite de deux parties disjointes dans l'infrastructure.

B) et BC à D (par C) mais A s'y trouve désormais relié à D par la composition des deux liens précédents ($A \rightarrow BC$ et $BC \rightarrow D \Rightarrow A \rightarrow D$) lors même que, dans l'infrastructure, les bases collectives concernées continuent de s'ignorer.

Le théorème nous dit alors que l'existence de tels éléments-limites dits *multiples* est une **condition nécessaire** pour qu'une superstructure (relativement) autonome **émerge**, (relativement) émancipée de l'infrastructure et rendue alors (relativement) incompréhensible à partir de sa seule base.

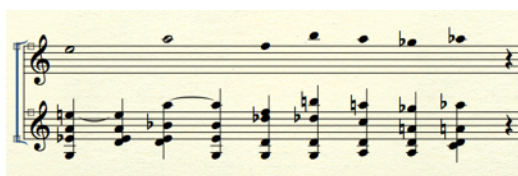
Trois images

- 1) On peut se figurer cette émergence sous l'effet d'un **froissement** : imaginons un patchwork fait de tissus disparates et donnons à chacune de ses pièces la forme d'un cône en étirant son centre vers le haut. Rapprochons maintenant certains de ces sommets au point de les confondre et de connecter ainsi, par leurs seuls sommets, des pièces entièrement disjointes dans le tissu de départ. La superstructure obtenue, composée des différentes pointes, ressemblera à notre ordre émergent puisque de nouvelles relations y apparaîtront qui n'auront plus d'équivalent dans le patchwork de base.
- 2) Tout de même, notre assemblée de Présidents va rapporter tel collectif sportif et tel collectif d'habitants par leur sommet lors même qu'à leur base, les individus concernés ne partagent aucune activité et ne se connaissent même guère.
- 3) Prenons une troisième image : celle d'un **champ de roseaux**. L'extrémité de chaque roseau peut être vue comme faisant limite du bout de terrain qui enserme la racine de chacun pour le fertiliser et l'hydrater. Tant que chaque roseau reste bien droit ou tant que tous les roseaux gardent la même inclinaison, la superstructure du champ – cette surface supérieure que l'on perçoit globalement faute de discerner le sol : sa « canopée » – va refléter fidèlement l'infrastructure du sol. Mais si le vent y met du sien et vient froisser ce champ, alors l'apparence de cette surface fera émerger des formes qui ne seront plus rapportables à celles du sol - le cinéma japonais aime à jouer de ces images :



(Onibaba, Kaneto Shindō – 1964)

On pourrait multiplier les images, par exemple musicales : si un collectif de notes est un accord, alors la hauteur supérieure de cet accord pourra être en position d'élément-limite et la mélodie qui découlera des rapports entre ces notes supérieures occupera la position de superstructure par rapport à l'infrastructure harmonique, et, dans certaines conditions, cette mélodie pourra en effet (relativement) s'autonomiser des enchaînements harmoniques qui continuent pourtant de la générer.



On peut résumer ce processus en disant que ce type d'émergence **ouvre l'accès à une nouvelle** structure par le fait même de **fermer l'accès à l'ancienne**. Ainsi pour ouvrir d'un côté – ici vers le haut -, il faut payer le prix en fermant d'un autre – ici vers le bas.

Pour ouvrir à une nouvelle situation, il faut refermer l'ancienne situation sur elle-même ; il faut en quelque sorte brûler une partie de ses vaisseaux pour pouvoir émerger, sans retour, dans la nouvelle situation.

Dans le cas d'une forêt donnée, pour qu'à sa crête une **canopée** s'autonomise (relativement), il faut en contrepartie qu'à sa base le terrain se replie en partie sur ses propres secrets.

Un matérialisme de l'émergence

Ce théorème – c'est son intérêt - engage **un matérialisme de l'émergence** : il y a bien une hiérarchie rationnelle des ordres emboîtés et ce n'est pas parce qu'un ordre repose sur une base matérielle donnée que sa logique propre se déduira strictement de la première.

- Ainsi la musique repose sur l'acoustique sans que pour autant ses lois propres en découlent strictement.
- Tout de même pour la politique par rapport aux collectifs sociaux qu'elle mobilise.
- Tout de même, plus généralement entre sujets composés de collectifs d'individus : les lois psychologiques, sociologiques, anthropologiques qui prévalent entre individus humains concernés (ceux qui appartiennent aux collectifs considérés) ne rendent plus intégralement compte de ce qui passe dans la sphère des sujets collectifs proprement dits, en particulier en matière d'intersubjectivité.

Autonomie relative !

Point essentiel : l'**autonomie** dont il a été ici constamment question n'est pas absolue mais **relative** car les lois propres de la superstructure ne sont pas pour autant *indépendantes* des lois propres de l'infrastructure. Il va en effet de soi qu'il ne saurait exister de superstructure s'il n'existait pas une infrastructure pour en être la base porteuse, le soubassement ! Et toute une série de lois infrastructurelles continuent bien sûr d'avoir une influence – une projection – dans la superstructure.

Prenons l'image de la canopée d'une forêt tropicale. Celle-ci ne reflétera plus exactement le système des rivières qui irrigue le sol mais pour autant gardera trace par exemple d'un large fleuve qui le traverse.

Ce théorème dégage donc **un matérialisme de l'autonomie relative**, certes une autonomie restant dépendante de ses conditions d'émergence (de son infrastructure, de sa base matérielle) – c'est en cela qu'il ne s'agit pas d'une autonomie *absolue*, ni d'une *indépendance* – mais cependant apte à imbriquer ces conditions à un autre monde, organisé selon ses lois propres.

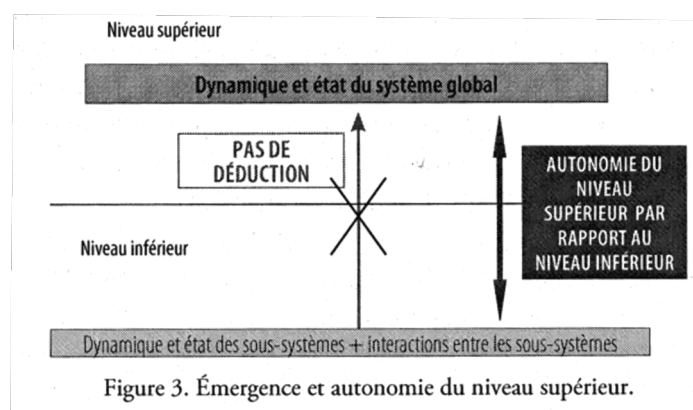


Figure 3. Émergence et autonomie du niveau supérieur.

Sébastien Poinat : *Mécanique quantique*.
(Hermann ; coll. *Visions des sciences* ; 2014)

Rétroaction ?

Un tel matérialisme engage alors une question sur laquelle notre théorème n'apporte pas de réponse immédiate : comment les lois relativement autonomes de la superstructure rétroagissent-elles sur les lois premières de l'infrastructure ? L'autonomie de ces lois n'étant pas absolue – la superstructure restant *dépendante* de l'infrastructure -, comment l'infrastructure est-elle ou non affectée en retour par cette émergence ?

Pour reprendre nos exemples,

- comment le sol de la forêt est-il affecté en retour par les échanges autonomes internes à la canopée ?
- comment les rapports internes à un collectif humain peuvent-ils être affectés en retour par le fait que leur représentant est également le représentant d'un tout autre type de collectif ?

- concernant le corps humain, comment l'esprit qui émerge rétroagit-il sur le fonctionnement endogène du corps, non seulement bien sûr en lui commandant ouvertement telle ou telle activité mais aussi par quelque phénomène subconscient ou inconscient d'ordre psychosomatique ?

L'intelligence de ces rétroactions nécessiterait une autre étude mathématique, détaillant cette fois la théorie mathématique des catégories hiérarchiques élaborée par Andrée Ehresmann.

Deux prolongements

Cette approche **mathématique** de l'émergence peut être mise en rapport avec deux approches **physiques** qui lui sont complémentaires et qui éclairent les phénomènes d'émergence à échelle humaine sous deux faces : vers le haut (astrophysique) et à partir du bas (mécanique quantique).

Contentons-nous ici d'indiquer leur logique de pensée.

Relativité d'échelle

La théorie de *la relativité d'échelle*⁹ prend en compte le fait qu'entre phénomènes imbriqués à différentes échelles (s'étendant du microscopique au macroscopique en passant par le mésoscopique – notre échelle), il n'y a pas continuité mais **des sauts** (de part et d'autre de **seuils** pouvant être indiqués par une constante universelle).

Les seuils en question relèvent-ils d'une stricte logique d'émergence (telle celle esquissée plus haut) ou engagent-ils également d'autres logiques ? C'est la question que la mécanique quantique vient éclairer à l'échelle subatomique.

Intrication quantique

Le phénomène, étrange mais désormais bien établi expérimentalement¹⁰, de *l'intrication quantique* indique qu'à l'échelle subatomique, la logique de l'émergence n'est pas la seule à se distinguer de celle dite de **réduction**.

La logique *réductionniste* peut s'illustrer de la deuxième règle cartésienne de méthode¹¹ : « *diviser chacune des difficultés que j'examinerais, en autant de parcelles qu'il se pourrait et qu'il serait requis pour les mieux résoudre* ».

L'émergence s'oppose à cette logique puisque le phénomène émergent ne sera pas « réductible » par « division » selon les composantes qui le supportent, la *synthèse* qu'il constitue ne pouvant être comprise *analytiquement* par **sommation** de ses constituants.

La mécanique quantique vient ici dégager que la partie intellectuelle se joue à trois puisque, comme **l'émergence**, **l'intrication** vient s'opposer à la **réduction** tout en se distinguant de la première.

Pour le dire simplement, *intrication* vient nommer une **interaction** étroite et durable qui n'est pas la simple confusion (de co-limites) au principe de l'émergence. Autrement dit, l'intrication n'est pas, comme l'émergence, un « *deux fusionne en un* » mais un entrelacement, une imbrication, un ajointement, un enchevêtrement où chaque composante ne perd pas son individualité tout en perdant son indépendance¹². Ainsi le phénomène multidimensionnel engendré par *intrication* de différentes composantes ne sera plus intelligible par « factorisation » en « dimensions » séparées¹³.

⁹ Voir les travaux de l'astrophysicien Laurent Nottale : *La relativité dans tous ses états* (Hachette, 1998) ; *Des fleurs pour Schrödinger. La relativité d'échelle et ses applications* (avec J. Chaline et P. Grou ; Ellipses, 2009)

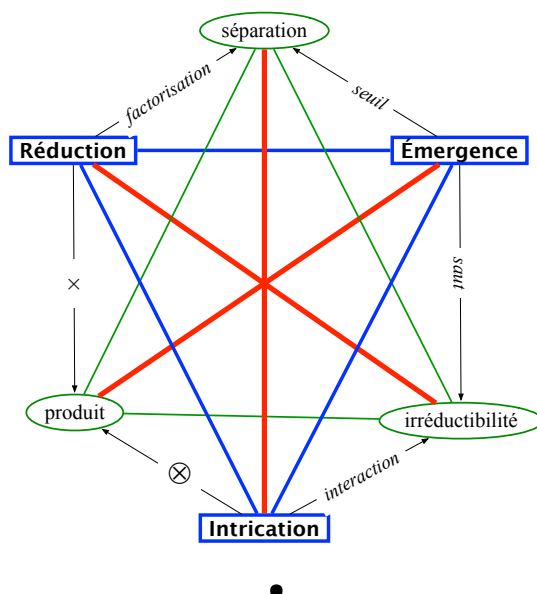
¹⁰ Voir le Prix Nobel décerné en 2022 à Alain Aspect

¹¹ *Discours de la méthode*, deuxième partie.

¹² Ce type d'intrication se formalise mathématiquement par un produit **tensoriel** ($\otimes$), qui diffère du produit **cartésien** ($\times$) lequel autorise une *réduction* par *factorisation* du produit selon les différentes dimensions qui le composent.

¹³ Voir pp. 255 et suivantes du livre mentionné de Sébastien Poinat : *Mécanique quantique. Du formalisme mathématique au concept philosophique* (éd. Hermann ; coll. *Visions des sciences* ; 2014).

On a donc affaire ici à une **dialectique à trois termes**, que l'on formalisera selon un *hexagone logique des oppositions* :



L'enjeu intellectuel de tout cela est vaste, tout spécialement pour nous communistes concernant les relations entre rapports *sociaux* et rapports *politiques*.

- Le « classisme » marxiste-léniniste relève clairement d'une problématique de la *réduction* (l'analyse des rapports politiques de classe peut s'y décomposer – s'y « réduire » - en celle des rapports sociaux de classe).
- Par contre, l'orientation communiste contemporaine soutiendra que **les rapports politiques sont irréductibles aux rapports sociaux** (ceux-là même que la politique communiste vise pourtant à révolutionner)¹⁴. En conséquence, la politique communiste relèvera d'une logique d'*émergence* ou d'une logique d'*intrication* selon qu'elle nommera **un point** militant (qui *émerge* des rapports sociaux) ou **une région** de la culture révolutionnaire (laquelle *intrique* différents types de rapports sociaux).

À suivre donc.

...

¹⁴ La politique communiste *moderne* bute sur l'*irréductibilité* de ses rapports comme l'algèbre *classique* a pu buter sur l'*irrésolubilité* de ses équations et l'*innommabilité* de leurs racines.

Reste alors aux communistes à dégager la relève affirmative de cette obstruction comme Galois a pu relever l'algèbre par le concept de *groupe* (qui nomme l'infrastructure solidarisant les racines et par là les rendant individuellement innommables).

Retenons ainsi la leçon moderne de Galois : **on peut précisément nommer l'innommabilité !**