

[RESSOURCES MATHÉMATIQUES]

« Ô mathématiques sévères, merci pour les services innombrables que vous m'avez rendus.
 Merci pour les qualités dont vous avez enrichi mon intelligence.
 Sans vous, j'aurais peut-être été vaincu. »
 Lautréamont

FRANÇOIS NICOLAS : THEOREME DE L'ACTION REGIONALEMENT RESTREINTE (1)

Nous prolongeons ici l'étude précédente ¹ des grandeurs mathématiques « **complexes** » qui intriquent nombres « **réels** » et grandeurs « **imaginaires** ». ²

Depuis le début du XIX^e siècle (voir Gauss), la mathématique formalise ainsi la grandeur complexe **z** :

$$z = x + y.i$$

z complexe ($z \in \mathbb{C}$) avec **x** et **y** nombres réels ($x, y \in \mathbb{R}$), et **i** grandeur *imaginaire* définie par $i = \sqrt{-1}$

Ces grandeurs complexes viennent **étendre** le monde mathématique des quantités en **adjoignant** aux nombres (réels) cette grandeur (imaginaire) **i**.

ENJEUX

Enjeux généraux

« Ce qui est lancé en Occident comme **hypothèses** devient chez nous Russes **axiomes**. » Dostoïevski ³

Pour nous communistes, l'enjeu intellectuel de cette étude mathématique est de continuer d'explorer les conséquences (rationnelles et matérialistes) de notre axiome : *il n'y a pas que ce qu'il y a*.

IL N'Y A PAS QUE CE QU'IL Y A.

Il n'y a pas que l'avéré car il y a aussi **le latent**.
 Il n'y a pas que le factuel car il y a aussi **l'imaginé**.
 Il n'y a pas que le déjà donné car il y a aussi **l'à-venir**.
 Il n'y a pas que l'effectif car il y a aussi **le possible**.
 Il n'y a pas que ce qui est car il y a aussi **ce qui arrive**.
 Il n'y a pas que l'être car il y a aussi **des événements**.
 Il n'y a pas que le déjà-là car il y a aussi **l'au-delà du déjà-là**.
 Il n'y a pas que l'ordre établi car il y a aussi **des révoltes logiques**.
 Il n'y a pas que des corps et des langages car il y a aussi **des vérités**.
 Il n'y a pas que la réalité apparente car il y a aussi **du réel insaisissable**.
 Il n'y a pas que l'état répertorié des choses car il y a aussi **des capacités insues**.
 Il n'y a pas que l'existence objectivable car il y a aussi **l'ek-sistence subjectivante**.
 Il n'y pas que le conformisme confortable car il y a aussi **des potentialités enfouies**.

¹ Pour un matérialisme des possibilités imaginaires, n°5 de la Revue, juin 2025 :

<https://longues-marches.fr/wp-content/uploads/2025/09/5-F-maths.pdf>

² Rappelons notre parti d'appeler **grandeurs** imaginaires et complexes ce que les mathématiques scolaires préfèrent appeler **nombres** imaginaires et complexes, oubliant ainsi le type nouveau de ces quantités (en particulier leur caractère non-ordonnable).

³ Cité par Lambert Nicolas (*La conscience de Staline. Kojève et la philosophie russe* ; Gallimard, 2025 ; pp. 23 et 46)

*Il n'y a pas que le pragmatisme intéressé car il y a aussi le désintéressement gratuit.
 Il n'y a pas que des reflets entre infrastructure et superstructure car il y a aussi des émergences.
 Il n'y a pas que l'empirisme raisonnable car il y a aussi la symbolisation de ressources sous-jacentes.
 Il n'y a pas que la mécanique calculable des causes et des effets car il y a aussi la libre décision s'enchaînant à ses conséquences rationnelles.
 ad libitum...*

Et pour la **mathématique** des quantités :

Il n'y a pas que les nombres réels car il y a aussi les grandeurs imaginaires.

Retenons avant tout ceci : il y a aussi l'**imagination** de ressources d'un type nouveau qui n'attend qu'un travail de **symbolisation** (mathématiquement dit : de formalisation) pour constituer un opérateur d'enquête sur le **réel**. Autrement dit, il y a aussi les perspectives révolutionnaires qui ne semblent qu'hypothèses irréalistes et utopiques jusqu'à ce qu'un groupe n'en fasse ses axiomes organisateurs d'intervention collective.

Nous avons précédemment examiné le comportement spécifique de ces grandeurs *complexes*, en particulier la manière dont l'**adjonction** de la quantité **i** vient **étendre** la structure des nombres réels (le corps $\mathbb{R}$) en une structure (le corps $\mathbb{C}$) doté de propriétés de type nouveau.

Aujourd'hui, il va s'agir d'examiner les ressources de type nouveau des **fonctions** prenant ces grandeurs pour variables, fonctions qu'on dira *complexes* puisque leurs variables sont désormais des grandeurs dites *complexes*.

Comme la mathématique appelle *analyse* l'étude des fonctions, nous allons donc examiner certaines propriétés spécifiques de l'**analyse complexe** (entendue comme l'analyse de ces fonctions complexes).

En particulier, on va examiner un théorème (sans équivalent en analyse réelle ⁴) – *le théorème du prolongement analytique* - pour l'interpréter intellectuellement comme théorisant une propriété distinctive majeure de l'action qu'on va dire régionale et qui résonne avec ce que Mallarmé a appelé **action restreinte**.

Mallarmé : Action restreinte

(1895) ⁵

Plusieurs fois vint un Camarade [...] me confier le besoin d'agir, [...] l'occupation de créer, qui paraît suprême et réussir avec des mots [...].

Agir [...] signifia [...] philosophiquement produire sur beaucoup un mouvement qui te donne en retour l'émoi que tu en fus le principe, donc existes [...]. Cette pratique entend [...] une volonté, à l'insu, qui dure une vie, jusqu'à l'éclat multiple – penser [...].

Ton acte toujours s'applique à du papier. [...] Écrire [...]. L'homme poursuit noir sur blanc.

Ce pli de sombre dentelle qui retient l'infini, tissé par mille [...].

Le droit à rien accomplir d'exceptionnel ou manquant aux agissements vulgaires, se paie, chez quiconque, de l'omission de lui et on dirait de sa mort comme tel. Exploits, il les commet dans le rêve, pour ne gêner personne ; mais encore, le programme en reste-t-il affiché à ceux qui n'en ont cure.

Un peuple témoigne de sa transfiguration en vérité.

Le voyageur [...] se convainc : « on traverse un tunnel – l'époque [...] ». Le souterrain durera, ô impatient [...].

Le suicide ou abstention, ne rien faire, pourquoi ? [...] Il n'est pas de Présent, non – un présent n'existe pas... Faute que se déclare la Foule, faute – de tout. Mal informé celui qui se crierait son propre contemporain, désertant, usurpant, avec impudence égale, quand du passé cessa et que tarde un futur ou que les deux se remmêlent perplexement en vue de masquer l'écart.

⁴ Entendue comme l'étude des fonctions qui n'ont pour variables que des nombres réels...

⁵ [https://fr.wikisource.org/wiki/Divagations_\(1897\)/L%E2%80%99Action_restreinte](https://fr.wikisource.org/wiki/Divagations_(1897)/L%E2%80%99Action_restreinte)

Pour le poète Mallarmé, *écrire* s'entend ici comme une action restreinte (au regard du « Livre » global). Pour les militants que nous sommes, elle sera l'action régionale entendue comme action régionalement restreinte (plus vaste et ambitieuse que locale mais d'une portée globale restreinte).

Enjeu spécifique

L'enjeu de cette étude va être d'examiner les propriétés singulières de l'action qu'on dira régionale (*entre local et global*) en dégagant ses potentialités globales.

Il va s'agir ce faisant de dépasser l'appariement convenu – conformiste en vérité – du « *penser globalement et agir localement* » : en effet, l'abîme entre ces deux versants enferme inéluctablement l'action dans des limites locales puisqu'une topologie globale ne saurait ⁶, sauf à de rares exceptions, se constituer par agrégat de voisinages locaux – d'où que la maxime précédente s'avère une maxime de la résignation conformiste, inadéquate donc aux légitimes ambitions révolutionnaires de la pensée communiste.

Comme nous allons l'examiner en détail, si une intervention militante s'avère capable de constituer une région en reliant deux voisinages ponctuels selon une même problématique, alors cette action (restreinte à une région ainsi constituée) s'avèrera dotée d'une légitime ambition globale. ⁷

METHODE

Avant de nous engager dans le dédale parfois aride de l'analyse complexe, rappelons que nos études des mathématiques modernes (depuis 1830) et contemporaines (depuis 1945) visent à **interpréter** intellectuellement certains de leurs résultats (sélectionnés à nos propres fins), non à les **appliquer** (comme on peut appliquer la mathématique aux sciences de la nature, exemplairement à la physique).

Appliquer ?

Appliquer s'entend pour le passage des lois de l'être (« ontologie ») aux lois des étants (« ontique ») c'est-à-dire aux lois des êtres-là apparaissant dans un monde donné (le monde particulier que l'adverbe « là » spécifie dans le syntagme « être-là »).

Ce passage des lois générales de l'être aux lois spécifiques des « êtres-là » se légitime du simple fait que l'être-là est ipso facto un être, régi par les lois générales de l'être, bien avant que ne s'adjoignent à ces lois « ontologiques » les lois spécifiques (« ontiques ») de tel ou tel « être-là » dans tel ou tel monde spécifié.

Autrement dit, les lois de l'être-là suivent a minima les lois de l'être, les lois ontiques (aussi physiques, chimiques, biologiques, naturelles...) ont donc pour noyau commun les lois ontologiques.

Pour donner un exemple trivial de cette application des lois ontologiques de l'être aux lois ontiques d'un être-là, la loi arithmétique $5+7=12$ ⁸ vaut tout autant pour 5+7 atomes ou 12 enzymes, pour 5+7 vaches ou 12 crayons, pour 5+7 êtres humains ou 12 sociétés, pour 5+7 planètes ou 12 galaxies.

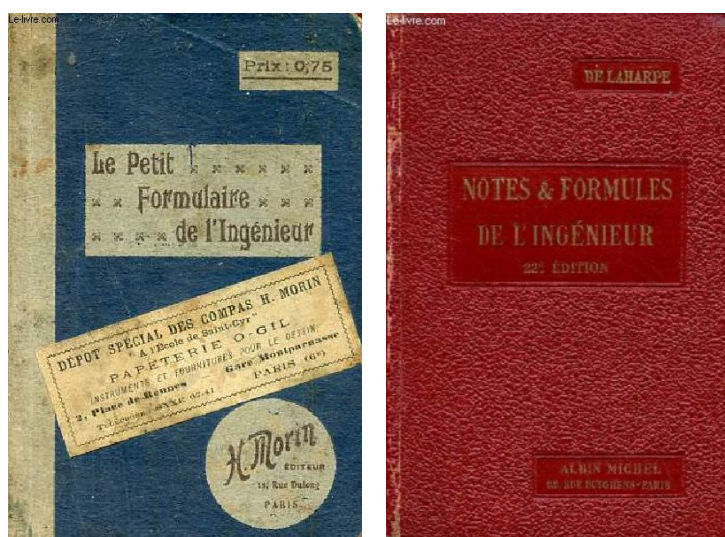
D'où que l'application mathématique puisse avoir pour véhicule privilégié le **calcul** et pour acteur principal l'**ingénieur** (lequel calcule les lois ontologiques de l'être s'appliquant aux étants en appliquant des formules mathématiques récoltées pour lui en formulaires prêts-à-l'emploi). ⁹

⁶ Voir Albert Lautman : *Le local et le global* (in *Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématiques*).

⁷ Où, ce faisant, on validera la problématique maoïste des « zones libérées » (à partir de 1928 en Chine) et des « régions » militantes de l'UCF-ml (à partir de 1970 en France)...

⁸ dont Kant fait le paradigme des jugements synthétiques a priori dans sa *Critique de la raison pure*

⁹ Notons la portée politique de ce point : dans la construction stalinienne du socialisme, l'**ingénieur** était devenu la figure motrice s'il est vrai que ce socialisme se construisait de manière programmée (les « plans quinquennaux » successifs) c'est-à-dire par application à l'économie du calcul matriciel.



Interpréter !

Par contre, **interpréter** intellectuellement tel ou tel segment de la pensée mathématique (une problématique, une perspective ou un résultat donnés) présuppose d'assumer deux points :

- 1) les mathématiques constituent bien une **pensée** effective : elles pensent l'être en soi, l'être en tant qu'être (c'est en ce sens qu'elles constituent une pensée qu'on dira de type *ontologique*¹⁰) et ne se réduisent nullement à une simple **logique** langagière¹¹ ;
- 2) il est possible de mettre en résonance ou réverbération différents modes de pensée (disons scientifiques, artistiques, politiques et amoureux) en sorte qu'ils se stimulent et s'émulent.

Dans cette intellectualité des **raisonances** (ou **résonances** entre différents modes de la **raison** humaine), il ne s'agira pas nécessairement de philosophie si l'on admet que la tâche propre de la philosophie est de compatibiliser un certain état de vérité entre ces différents modes de pensée en édifiant un concept du temps qui leur est commun (voir les *Épistémè* de Michel Foucault, les *Siècles* d'Alain Badiou ou les *Moments* de Frédéric Worms). Notre propre intellectualité communiste ne se prescrit pas un tel objectif de type philosophique : elle vise, plus modestement (action à nouveau restreinte !) de penser une politique communiste de type nouveau à la lumière des mathématiques modernes et contemporaines.

Dans une telle démarche, la validation de l'interprétation va reposer sur sa **fécondité intellectuelle** : s'adosser ainsi aux mathématiques en pensant « à leur lumière » permet-il d'investiguer le domaine intellectuel concerné avec de nouvelles questions, de l'explorer avec de nouveaux enchaînements, de l'engager sur de nouvelles perspectives ?

Un tel examen rétrospectif viendra, en fin d'article, évaluer la fécondité de notre présente démarche.

Deux temps

Comme nous allons le faire, interpréter un théorème mathématique particulier, situé dans une théorie mathématique spécifique (ici l'analyse complexe), impliquera alors :

- I. d'abord de bien comprendre mathématiquement ce que ce théorème pense mathématiquement – d'où la nécessité première d'aborder la mathématique en intériorité et d'épouser son mode propre d'énonciation (le mouvement interne de sa pensée) et non pas, comme l'ingénieur, d'examiner en extériorité subjective ses énoncés formulaires résultants sans s'intéresser à la dynamique discursive de leur démonstration ;

¹⁰ D'où tout le débat philosophique sur l'axiome « *mathématiques=ontologie* » avancé dans *L'être et l'événement* (Alain Badiou) pour examiner si les mathématiques ont l'exclusivité de la pensée ontologique ou s'il n'existe pas d'autres modes de pensée ontologique que mathématiques (par exemple poétiques).

¹¹ La distinction mathématiques/logique est formellement attestée par le contraste entre **axiomes** mathématiques d'**existence** (dont le paradigme est « il existe un ensemble vide : $\exists \emptyset$ ») et **règles** logiques d'**inférence** (dont le paradigme est le *modus ponens* : si A et $A \rightarrow B$, alors B).

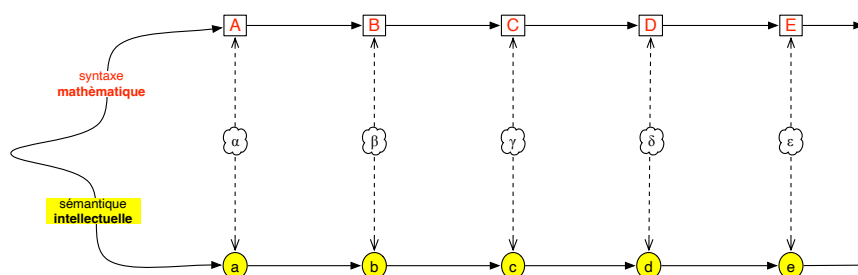
- II. de mettre alors cette pensée mathématique en résonance-réverbération (ce que nous appelons *raisonsances*) sous l'hypothèse (extra-mathématique) que les rapports mathématiques entre nombres réels et grandeurs imaginaires peuvent donner à penser sur les différents rapports entre effectivités et possibilités.

Marcher sur deux jambes

Ce faisant, nous allons interpréter « sauvagement »¹² une **théorie** mathématique (*l'analyse complexe*) dans un **modèle**¹³ totalement hétéronome (celui de *l'action restreinte des humains*) en suivant le fil analogique suivant :

$$\frac{\text{discours mathématique}}{\text{discours intellectuel}} \equiv \frac{\text{théorie}}{\text{modèle}} = \frac{\text{formalisation}}{\text{interprétation}} \cong \frac{\text{syntaxe}}{\text{sémantique}}$$

Notre marche sur deux jambes va ainsi prendre la forme d'une voie de chemin de fer dont le rail directeur (de nature *syntaxique*) sera le discours *mathématique* : pour chaque progression sur ce rail [A→B→C→D→E...], nous édifierons une traverse [α, β, γ, δ, ε...] autorisant une progression analogue [a→b→c→d→e...] sur l'autre rail (de nature *sémantique* : celui du discours *intellectuel*) :



Cinq étapes

La présentation minutieuse de ce parcours nécessiterait de détailler de trop nombreuses « traverses ». ¹⁴ Nous allons ici simplifier notre « voie ferrée » et procéder en cinq étapes pour examiner successivement :

- 1) les traits spécifiques de l'action « intervenante » qu'une **fonction** « complexe » formalise ;
- 2) les modalités spécifiques de la **différenciation** pour ces fonctions « complexes » qui formalise la consistance *ponctuelle* d'une telle action « intervenante » ;
- 3) l'intervention spécifique d'une **intégrale de contour** venant transformer la précédente action ponctuelle *discrète* en une action *continue* « faisant le tour » du point concerné – cette étape vise à constituer la cohésion *locale* de l'intervention ;
- 4) l'émergence, ce faisant, d'une **analyticité**¹⁵ de la fonction considérée, propriété algébriquement rigidifiante qui vient « ossaturer » la mobilité de l'intervention - cette propriété, spécifique aux fonctions complexes, est la clef de voute de tout ce parcours de pensée ;
- 5) et finalement le caractère analytiquement **prolongeable** de cette fonction, que nous interpréterons comme portée globale de toute intervention régionalement (et non plus localement) restreinte.

¹² Au sens que Claude Lévi-Strauss donne à ce terme dans son livre *La Pensée sauvage*.

Assumons donc que notre logique intellectuelle relève de ce que Claude Lévi-Strauss appelle dans ce livre « **bricolage** » : « faire avec les moyens du bord, s'arranger avec ce que l'on a en opérant avec des outils disparates conservés au cas où... », cette manière de faire qu'il oppose précisément à celle de l'ingénieur, lequel planifie ses opérations en constituant préalablement son outillage ad hoc (tel les précédents « formulaires mathématiques »).

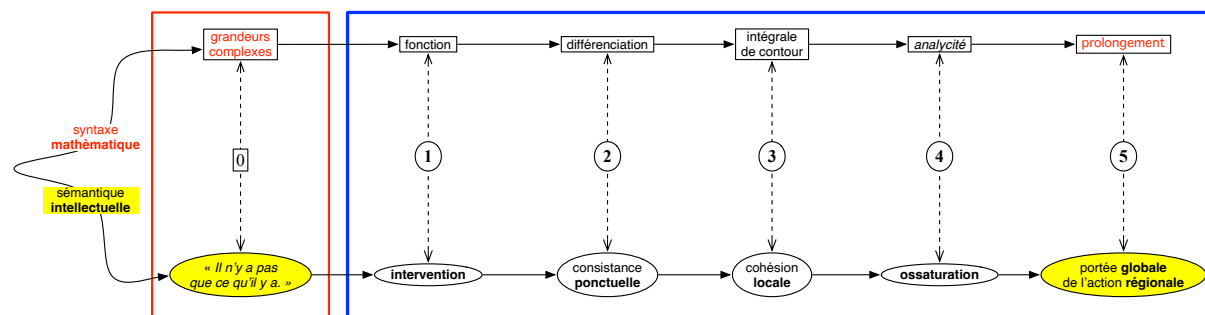
¹³ Voir en logique mathématique la *théorie des modèles* (et son premier examen, dès 1968, par Alain Badiou dans *Le concept de modèle* – Cours de philosophie pour scientifiques ; Maspéro, 1970)

¹⁴ Voir mes interventions

- 1) au séminaire mamuphi
- 2) dans le cadre de leçons sur les mathématiques modernes au théâtre La Commune d'Aubervilliers :

¹⁵ Une fonction complexe sur un domaine D est **analytique** si, en tout point z de D, elle a une expansion en séries entières du type : $f(z+h) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n h^n$. Cette fonction aura donc la structure algébrique d'un polynôme infini, d'où une structure cristallographique qui va pouvoir être plus facilement prolongée...

D'où cinq traverses, prolongeant la traverse initiale « 0 » posée dans notre précédent article :



Plutôt que d'examiner d'abord l'ensemble de la théorie mathématique concernée pour ne l'interpréter qu'ensuite, nous procéderons pas à pas : à chaque étape, nous examinerons la « traverse » qui interprète intellectuellement (« sémantiquement ») la formalisation mathématique (« syntaxique ») en sorte d'éviter ainsi au lecteur non-mathématicien la claustrophobie dans de trop longs tunnels purement mathématiques.

•

Pour ne pas étendre démesurément cet article, contentons-nous ici de détailler les deux premières étapes, renvoyant l'examen des trois dernières au prochain numéro 7 de la revue (février 2026).

0. ANALYSE COMPLEXE

Après Gauss, l'**analyse** complexe (entendue comme la théorie des fonctions complexes) est inventée par Cauchy autour de 1838. Elle va examiner comment les grandes propriétés des fonctions *réelles* (qui ossaturent l'analyse *réelle* : limites et continuités, différenciations et intégrations, compositions entre fonctions...) se prolongent et se transforment pour les **fonctions complexes**.

Sélectionnons dans cet immense champ théorique ce qui nous est nécessaire pour comprendre – du moins intuitionner – la pensée conduisant au théorème que nous avons pris pour cible.

1. FONCTION / ACTION

Formalisation : *fonction complexe*

Une fonction complexe f transforme une grandeur complexe z en une nouvelle grandeur complexe $z'=f(z)$:

$$z \xrightarrow{f} f(z) : z=x+i.y \xrightarrow{f} z'=x'+i.y'$$

Les grandeurs complexes z et z' appartenant au corps $\mathbb{C}$ des grandeurs complexes - $z, z' \in \mathbb{C}$ -, on dira que la fonction complexe f est une **C-fonction**.

Intrication

Attention : la grandeur complexe z **intrique** ses deux composantes x (nombre réel) et $i.y$ (grandeur imaginaire) et ne se contente pas de les accoler. C'est donc cette intrication comme telle qui est transformée (par la $\mathbb{C}$ -fonction f) en une nouvelle intrication (de x' et $i.y'$) : on n'a donc pas deux transformations séparées – d'un côté de x en $f(x)$ et d'un autre côté de y en $f(y)$ – qui viendraient ensuite s'accoler.

Autrement dit, $x \neq f(x)$, $y \neq f(y)$ et $f(x) \neq f(x)+f(y)$.

Exemple

Soit $f(z)=z^2=(x+iy)^2=x^2+2i.xy-y^2=(x^2-y^2)+2i.xy$

On a alors

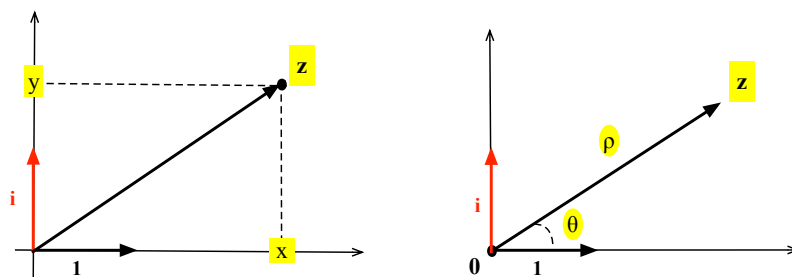
- $x'=x^2-y^2$ qui fait intervenir y et diffère de $f(x)=x^2$
- $y'=2xy$ qui fait intervenir x et diffère de $f(y)=y^2$

Au total $f(z) = f(x)-f(y)+2i.xy \neq f(x)+f(y)$

Ce point est pour nous très important : intervenir dans une situation pour transformer l'intrication de ses effectivités et de ses possibilités ne consiste pas à transformer séparément ces deux volets (pour ensuite les réassocier) mais à bien transformer leur intrication ! Autrement dit, possibiliser certaines effectivités d'une situation donnée modifie non seulement ses effectivités (en les augmentant) et ses possibilités (en les réduisant) mais également leur rapport dans la situation concernée !

Représentation graphique

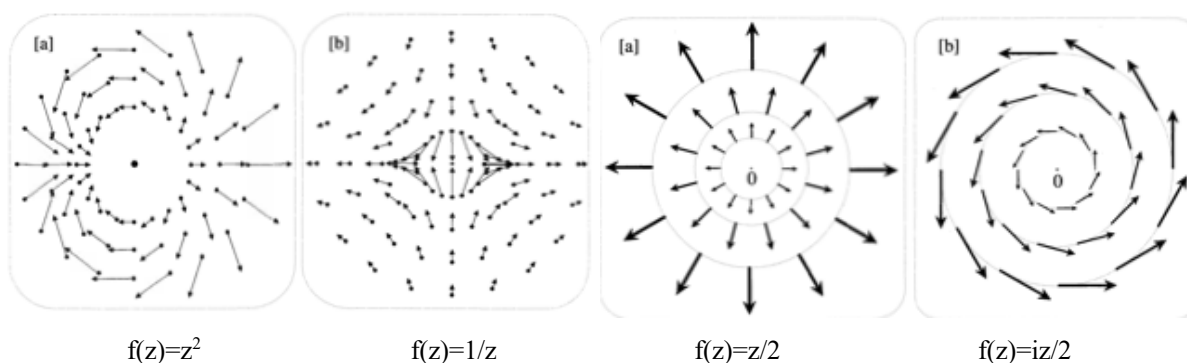
La représentation graphique d'une grandeur complexe se fait très naturellement dans un plan (qu'on appellera plan complexe ou $\mathbb{C}$ -plan) où l'axe horizontal est celui des nombres réels x et l'axe vertical celui des grandeurs imaginaires $y.i$ ou $i.y$: la grandeur complexe $z=x+iy$ s'y représente comme un point (de coordonnées dites **cartésiennes** : x et y) ou comme un vecteur $\vec{Oz}$ (de coordonnées dites **polaires** : longueur ρ et angle θ) :



Une fonction complexe transforme tout point d'un tel $\mathbb{C}$ -plan en un point d'un même $\mathbb{C}$ -plan. Comment la représenter graphiquement ? Il faudrait pour cela savoir figurer un espace à 4 dimensions dans notre espace perceptif à 3 dimensions ! D'où différents subterfuges pour y pallier :

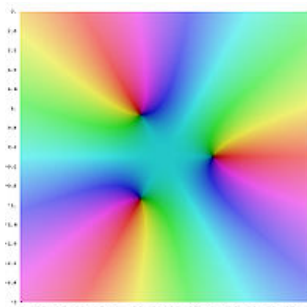
1) Un champ vectoriel

En chaque point z du plan complexe $\mathbb{C}$, on inscrit le vecteur $f(z)=x'+iy' : \{x' ; y'\}$:



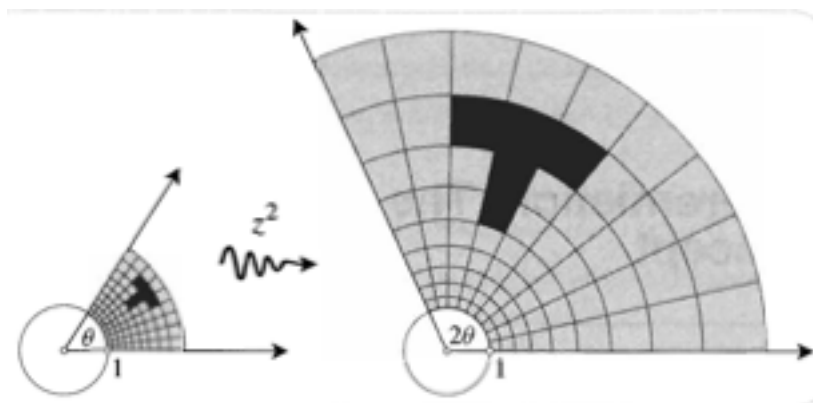
2) Un plan coloré

En chaque point z du plan complexe $\mathbb{C}$, on inscrit les coordonnées polaires $\{\rho', \theta'\}$ de $f(z)$ en les représentant par une intensité et une couleur :



$$P(z)=z^3-1$$

3) Deux plans juxtaposés ¹⁶

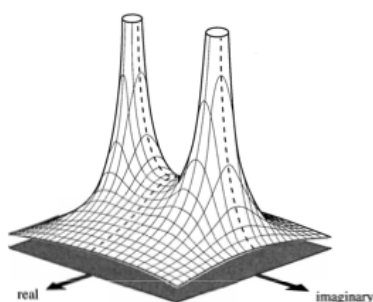


$$f(z)=z^2$$

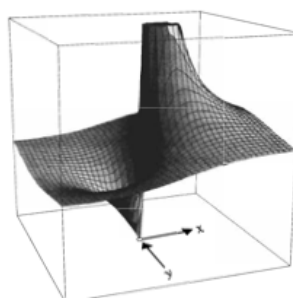
Cette représentation figure clairement les déformations du plan complexe par « amplirotation » ¹⁷.

4) Surfaces

On se contente ici de représenter les longueurs (ρ) au moyen de « nappes » posées sur le plan horizontal $\{x, y\}$ des z :



$$\frac{1}{1+z^2}$$



$$e^{\frac{1}{z}}$$

Chacun de ces modes graphiques de représentation d'une fonction complexe donnée aura ses avantages et inconvénients. Aucune n'est entièrement satisfaisante ce qui correspond bien pour nous à la difficulté propre de penser ce qu'intervention dans une situation veut dire quand cette intervention ne s'enferme pas dans une perspective purement gestionnaire de l'état des choses (de « ce qu'il y a

¹⁶ On peut également utiliser deux plans superposés...

¹⁷ Cette interprétation géométrique du produit complexe qui associe une **amplification** (par multiplication des longueurs) et une **rotation** (par addition des angles) – voir le numéro 5 de la revue p. 102.

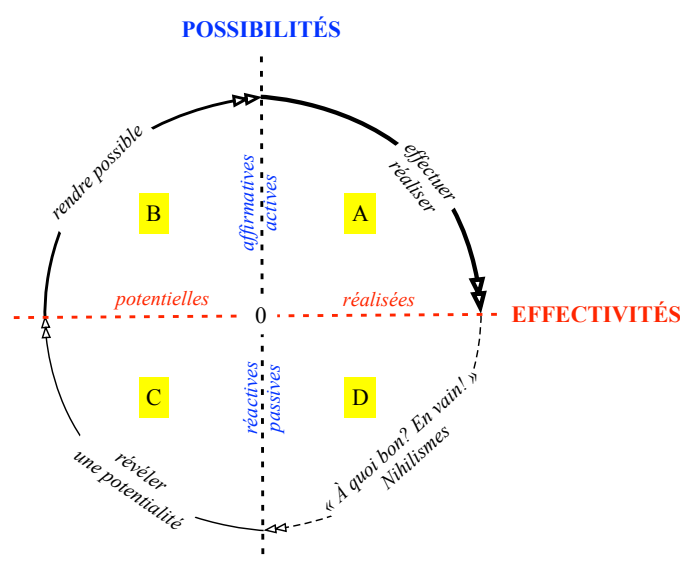
factuellement ») mais assume d'intervenir sur l'intrication des effectivités et des possibilités qui trame secrètement cette situation.

Interprétation : action intervenante

Nous interprétons une fonction complexe qui transforme tout point (d'une partie ou de tout le plan complexe) en un autre point comme intervention d'ensemble sur une situation donnée qui transforme en tout point (d'un de ses domaines ou de la situation dans son ensemble) ses rapports immanents (et en partie secrets) entre effectivités et possibilités.

Reprenant notre diagramme présenté dans le numéro 5 de cette revue¹⁸, nous voyons comment les transformations des différents « points » de la situation¹⁹ sont figurées comme déplacements (dans le sens des aiguilles d'une montre²⁰) dans les 4 quadrangles A, B, C, D du plan complexe :

- 1) L'advenue dans le quadrangle A à partir du quadrangle B figure l'effectuation d'une possibilité.
- 2) L'advenue dans le quadrangle B à partir du quadrangle C figure qu'une potentialité révélée (et restant sous conditions) devient possible.
- 3) L'advenue dans le quadrangle C à partir du quadrangle D figure qu'une potentialité précédemment forclosée est révélée.
- 4) L'advenue dans le quadrangle D à partir du quadrangle A figure une dynamique nihiliste, refoulant toute potentialité et forclisant toute possibilité.



2. DIFFÉRENCIATION / CONSISTANCE PONCTUELLE

Formalisation : différenciation complexe

Peut-on connaître **localement** une fonction complexe $f(z)$ donnée par une formule du type $f(z)=z^2$, c'est-à-dire connaître comment elle varie dans le voisinage d'un point z_0 donné ? Tel va être l'enjeu de la **différenciation** de $f(z)$ en un point donné z_0 .

La fonction complexe $f(z)$ sera différentiable au point z_0 si une variation minimale dz autour du point z_0 engendre une variation minimale df de $f(z)$ [$dz \rightarrow df$] qui lui reste **commensurable** c'est-à-dire telle qu'il existe une grandeur complexe φ avec $df=\varphi.dz$.

¹⁸ p. 104

¹⁹ Transformations résultant bien sûr, dans notre interprétation, d'une intervention dans la situation en question...

²⁰ Déplacements formalisés selon une multiplication par $-i$ (entendue comme « désimagination »).

Si tel est le cas on notera $f'(z_0)$ cette grandeur φ , on l'appellera la dérivée de $f(z)$ en z_0 et on écrira $df=f'(z_0).dz$ - jusque-là pas grande différence avec la dérivation d'une fonction réelle $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Enjeux de la différenciation

• Enjeux mathématiques

Si $f(z)$ est différentiable au point z_0 [c'est-à-dire s'il existe $f'(z_0)$ tel que $df=f'(z_0).dz$], alors, aux voisinages du point z_0 , $f(z)$ est dotée non seulement d'une **continuité**²¹ mais d'une **cohésion** locale puisque variations de « la cause » z et variations de « l'effet » $f(z)$ deviennent alors commensurables à proximité du point z_0 . Cette cohésion locale de f s'attache ainsi à l'existence d'une fonction f' qui va jouer vis-à-vis de f le rôle de fonction génératrice : au lieu de remonter de f à f' par différenciation, on va pouvoir engendrer f à partir de f' par intégration (ce qui, mathématiquement, est très intéressant, car l'intégration est une opération beaucoup moins problématique que ne l'est la différenciation) :

$$f \xrightarrow{\text{différenciation}} f' \Rightarrow f' \xrightarrow{\text{intégration}} f$$

• Enjeux intellectuels

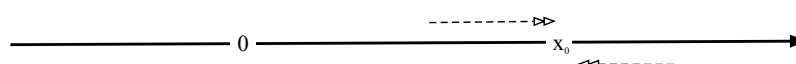
Si nous interprétons $f(z_0)$ comme formalisant une **action** f sur un point z_0 donné d'une situation donnée ($z_0 \in \mathbb{C}$), alors l'existence en ce point z_0 de la différentielle $f'(z_0)$ sera interprétable comme formalisant l'existence d'une **mobilisation** pour cette action²². Autrement dit, l'action f aura une cohésion locale en ce point car elle procèdera d'une mobilisation contrôlable (et non pas erratique ou capricieuse). Forçons le trait pour les besoins de notre démonstration et posons que l'action f sera **localement libre** précisément parce qu'elle obéira aux lois de mobilisation qu'elle se sera ici données : « *l'obéissance à la loi qu'on s'est prescrite est liberté* » (Rousseau, *Du contrat social*).²³

On touche ainsi à une première caractérisation de notre action régionalement restreinte : elle doit procéder localement d'une mobilisation autodisciplinée.

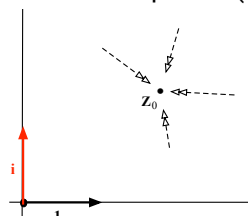
Complexité singulière de la différenciation complexe

La grande nouveauté des fonctions complexes est que le corps $\mathbb{C}$ des grandeurs complexes n'est plus ordonné comme l'est le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels.

Les nombres réels étant ordonnables (pour deux nombres différents x et y quelconques, on a $x < y$ ou $y < x$), on peut les représenter par une droite (orientée par la relation d'ordre $<$). En conséquence, on ne pourra approcher un nombre réel x_0 donné que de deux façons : par la gauche (par des nombres plus petits) ou par la droite (par des nombres plus grands) :



Le corps des grandeurs complexes n'étant plus ordonnable n'est plus représentable par une droite en sorte que toute grandeur complexe z_0 va s'avérer approchable de bien des manières : par le haut, par le bas et par une infinité d'obliques. Il va donc falloir nous assurer que, quelle que soit la manière dont on approche z_0 , la dérivée – c'est-à-dire la grandeur complexe $f'(z_0)$ – sera bien la même !



²¹ Point important que nous ne détaillerons pas ici : en général, une fonction continue (réelle ou complexe) n'est pas ipso facto différentiable. Par contre, toute fonction différentiable est ipso facto continue :

continuité $\nRightarrow$ différentiabilité mais différentiabilité $\Rightarrow$ continuité

²² Je renvoie ici à la dialectique des *mobiles* (en amont des décisions) et des *motifs* (en aval) de Sartre dans *L'être et le néant*...

²³ La liberté n'est pas l'absence libérale de contraintes et la dictature du caprice mais la capacité de se décider des lois autonomes, pour s'en tenir responsables selon une discipline prolongée des conséquences.

Contre-exemple

Soit la fonction $f(z)$ définie par $z=x+iy \rightarrow z'=x-iy$.

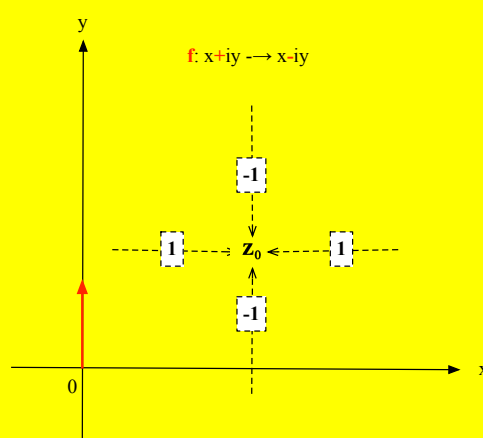
Elle s'appelle la fonction *conjugaison* car elle fait correspondre à $z=x+iy$ son *conjugué* $\bar{z}=x-iy$.

z et $\bar{z}$ sont dits « conjugués » car leur produit est un nombre réel :

$$z \cdot \bar{z} = x^2 - y^2 \in \mathbb{R} \text{ (puisque } x \text{ et } y \text{ sont des nombres réels)}$$

La particularité est alors que pour un point donné $z_0=x_0+iy_0$ les approches horizontale (variant uniquement x) ou verticale (variant exclusivement y) vont engendrer des résultats très contrastés pour la fonction $f(x+iy)$:

- horizontalement, y ne variant pas, on va avoir $df=dx$ et donc $f'(z_0)=1$;
- verticalement, x ne variant pas et y devenant $-y$, on va avoir $df=-dy$ et donc $f'(z_0)=-1$.



On n'a donc pas la même limite selon que l'on approche le même point z_0 horizontalement ou verticalement !

La fonction « conjugaison de z », pourtant continue, n'est donc pas différentiable.

Interprétation intellectuelle : l'inconsistance d'une ultra-gauche !

La fonction conjugaison de $z=x+iz$ inverse sa composante verticale en $\bar{z}=x-iy$. Dans notre interprétation, elle inverse donc possibilités affirmatives et négatives.

Mais alors, si l'on approche z_0 horizontalement (par les seules composantes « effectives » par neutralisation de la composante verticale des possibles), cette inversion des possibles n'opère plus et l'on se meut donc systématiquement dans l'opération identité **1** des effectivités et donc $df=dz$.

Par contre, si on approche le même point z_0 cette fois verticalement (sans modifier les effectivités mais en inversant affirmations et négations des possibles), alors on se meut systématiquement dans l'opération inversion **-1** des possibilités et donc $df=-dz$.

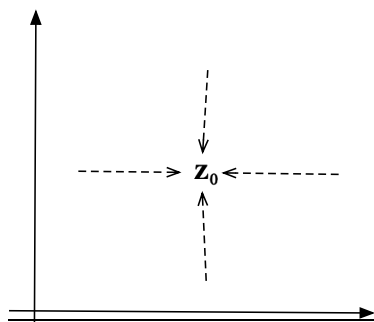
D'où que l'intervention f n'est plus localement consistante au voisinage de z_0 : son projet d'intervention, n'étant mobilisé que par une mutation entre possibilités actives et réactives, se désintéresse de toute transformation des effectivités, « désintrique » ainsi ce qui fait corps de la situation et devient alors incapable d'une action consistante autour du point retenu dans la situation – on reconnaîtra facilement en ce désir de simplement inverser une réaction (par exemple fasciste) en une action antifasciste l'inconsistance d'une ultra-gauche !

D'où l'importance des conditions pour que ces différentes approches conduisent au même résultat et fasse exister en z_0 une seule dérivée $f'(z_0)$.

L'enjeu, rappelons-le, est que les résultats d'une intervention minimale autour du point z_0 retenu restent commensurables à ses origines minimales **quel que soit l'angle d'attaque** de ce point.

Conditions d'existence

Pour assurer cela, il va falloir que la fonction $f(z)$ vérifie au point z_0 des conditions très particulières qu'on appelle **conditions de Cauchy-Riemann** qui, en gros, assurent qu'on aboutit à la même grandeur $f'(z_0)$ selon qu'on arrive à z_0 par chacune des quatre directions suivantes : ²⁴



La mathématique ici se complique un peu, suffisamment en tous les cas pour qu'on épargne au lecteur de cette revue ses détails techniques.

Attention : ces « détails » ne relèvent aucunement d'un calcul aveugle et sans intérêt. On en trouvera d'ailleurs l'explicitation et l'interprétation minutieuses dans la cinquième leçon de mathématiques modernes donnée le 5 février 2022 au théâtre La Commune d'Aubervilliers. ²⁵ Il s'agit simplement ici de raccourcis, imposés par le format propre d'un article de cette revue.

Les conditions de Cauchy-Riemann [CRR] vont être des conditions nécessaires mais pas suffisantes pour que $f(z)$ soit différentiable en z_0 .

Théorème CRR

Soit $f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+i.v(x,y)$.

Exemple

Si $f(z)=z^2$, on a $f(z)=(x+iy)^2=x^2+2i.xy-y^2=(x^2-y^2)+2i.xy$.

Donc ici : $u(x,y)=x^2-y^2$ et $v(x,y)=2xy$

- 1) Il faut d'abord que les quatre dérivées partielles u'_x , u'_y , v'_x et v'_y existent au point z_0 .

Dans notre exemple, elles existent et valent : $u'_x=2x$; $v'_x=2y$; $u'_y=-2y$; $v'_y=2x$

- 2) Il faut ensuite que ces quatre fonctions dérivées soient continues en z_0 .

C'est le cas dans notre exemple.

- 3) Il faut enfin que l'on ait en ce point deux égalités croisées : $u'_x=v'_y$ et $v'_x=-u'_y$.

Dans notre exemple, on a bien : $u'_x=v'_y=2x$ et $v'_x=-u'_y=2y$

Si ces trois conditions sont réunies, alors f sera différentiable en z_0 et l'on aura :

$$f'(z_0) = u'_x(z_0) + i.v'_x(z_0) = v'_y(z_0) - i.u'_y(z_0)$$

Au total, on voit qu'assurer la différentiabilité est plus compliqué pour une fonction complexe que pour une fonction réelle (pour laquelle on n'a pas l'équivalent des CCR).

La contrepartie va être que si la fonction complexe est bien différentiable, alors elle va être dotée d'extraordinaires propriétés qui vont considérablement simplifier son action.

²⁴ Tout autre approche « de biais » pourra être engendrée par simple combinaison linéaire de ces quatre approches élémentaires.

²⁵ Vidéo : <https://youtu.be/jR2dkhDJSUs>

Texte : <http://www.entretiens.asso.fr/Nicolas/mathsmodernes/5-Cauchy.pdf>

Le mathématicien Ian Stewart ²⁶ avance ici une image très parlante : l'analyse complexe revient à « *démarrer une machine bien huilée sur la glace* » ; le difficile, c'est de partir mais, une fois parti, les enchaînements vont s'avérer très lisses : la fonction sera indéfiniment différentiable et donc aisément contrôlable !

Interprétation : consistance ponctuelle

Simplifions notre interprétation en posant que l'examen des effectivités (formalisées par l'axe horizontal des x) est marqué par l'**objectivité** quand l'examen des possibilités (formalisées par l'axe vertical des y) convoque plus immédiatement la **subjectivité** (telle possibilité est-elle intéressante ou néfaste, à activer ou à entraver, à encourager ou à combattre ? etc.).

Si l'on adopte cette grille interprétative simplifiée, on dira que

- u'_x formalise un rapport objectivant à une question objective : comment la modification des effectivités (qui sont matérialisées dans le point à traiter) va-t-elle affecter les nouvelles effectivités (du point transformé) ?
- u'_y formalise un rapport subjectivant à une question objective ²⁷ : comment le traitement des possibilités (en jeu dans le point à traiter) va-t-il affecter les effectivités (du point transformé) ?
- v'_x formalise un rapport objectivant à une question subjective : comment la modification des effectivités (du point à traiter) va-t-elle affecter les possibilités (du point transformé) ?
- v'_y formalise un rapport subjectivant à une question subjective : comment le traitement des possibilités (en jeu dans le point à traiter) va-t-il affecter les nouvelles possibilités (du point transformé) ?

L'interprétation des CRR ²⁸ conduit alors à l'idée suivante : il faut que le projet d'intervention en un point **consiste** en sorte qu'il soit possible de parler **du** projet d'une intervention et non pas d'un fatras disparate, désordonné, incohérent et contradictoire selon que l'on examine le point en question sous l'angle des seules effectivités, des pures possibilités ou de leurs innombrables intrications.

En un certain sens, il s'agit de s'assurer, au point retenu, d'intervention de la consistance locale de notre principe : « *il n'y a pas que ce qu'il y a d'effectif car il y a aussi ce qu'il y a des possibles* », c'est-à-dire somme toute de s'assurer que les quatre occurrences de la même locution « *il y a* » dans notre principe sont localement compatibles.

Autrement dit, l'enjeu est ici de pouvoir passer d'une *analytique* du point à une décision *synthétique* le concernant : l'*analytique* procède par décomposition en tâches élémentaires selon différentes dimensions projectives mais elle doit déboucher sur la détermination d'une **direction** coordonnant et *synthétisant* les différents angles d'attaque du point.

Nos mathèmes

Mathème du « il y a »

Le principe d'intervention « il n'y a pas que ce qu'il y a » sera localement consistant si le projet d'intervention assure la compatibilité locale de ses différents angles d'approche intervenante.

Appelons alors **direction d'intervention** une telle cohérence.

Mathème de la direction

On en déduira le « lemme » suivant : une intervention sera consistante si elle suit une direction solidement fixée, apte à régulariser les inévitables aléas d'approche du point.

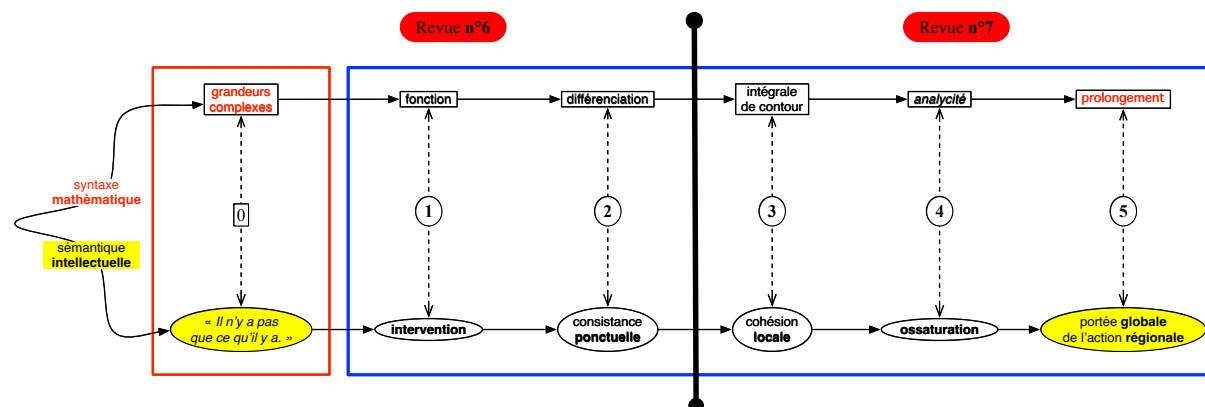
• •

²⁶ Ian Stewart & David Tall : *Complex Analysis* (Cambridge University Press, 2^e édition 2018)
<https://web.math.ucsb.edu/~agboola/teaching/2021/winter/122A/st.pdf>

²⁷ L'action « objective » sur les effectivités (action notée « u ») est ici vue sous l'angle « subjectif » des possibilités (angle noté « y »).

²⁸ sans nous attarder ici dans une interprétation trop pointilleuse des deux conditions $u'_x = v'_y$ et $v'_x = -u'_y$

Pour l'instant, tenons-nous-en là :



et renvoyons l'examen détaillé des trois dernières étapes au numéro 7 de la revue :

- 3) Intégrale de contour / Cohésion locale
- 4) Analyticité de la fonction / Ossaturation de l'intervention
- 5) Prolongement analytique / Portée globale de l'intervention

FECONDITE DE CET ECLAIRAGE MATHÉMATIQUE

Mais, par anticipation, formulons les conclusions synthétiques de cette étude et rehaussons ainsi les ressources mathématiques qu'une telle théorie moderne procure à une intellectualité militante de type nouveau.

Cinq pas

Résumons les **cinq pas** engagés dans cette étude.

- 1) Une action *moderne* intervient dans une situation donnée en prenant en compte **ses potentialités pour les intriquer à ses effectivités**, classiquement répertoriées. La « complexité » (assumée a priori) d'une action qui ainsi ne s'enferme plus dans les simples perspectives gestionnaires du déjà donné va déboucher sur sa plus grande lisibilité.
- 2) Une telle action *moderne* commence son intervention par un premier point précisément localisé pour en faire le tour dans la situation concernée - autrement dit en enquêtant sur la manière dont le point en question intrique effectivités et possibilités *selon ses différents voisinages*. Ici la « complexité » de l'action intervenante vient donc éclaircir **localement** les tenants (*mobilisations*) et aboutissants (*motivations*) du projet d'intervention.
- 3) Aux conditions précédentes, une telle action va s'avérer « algébriquement » intelligible c'est-à-dire appréhendable comme **assemblage réglé de composantes distinctes** : elle peut ainsi s'autoanalyser en distinguant les différentes dimensions intriquées dans son projet. Ce faisant, l'action, dotée de la capacité de séparer ce qui compte vraiment pour elle de ce qui n'a de portée qu'accessoire, va pouvoir organiser et contrôler en intériorité son propre développement (sans se perdre indéfiniment dans l'infini miroitement de détails peu significatifs).
- 4) Ainsi dotée de sa propre ossature intellectuelle, l'action va accéder à son épreuve décisive : sa capacité à relier deux points différents de la situation (très exactement leurs deux voisinages) selon le même projet en sorte de constituer ainsi **une région** fibrée par de mêmes perspectives d'intrication entre nouveaux possibles et état effectif de la situation.
- 5) Résultat majeur : peu importe alors la taille de cette région ainsi **constituée** ; cette région sera ainsi devenue **constituante** d'une assurance en l'ambition globale (c'est-à-dire pour l'ensemble de la situation concernée) du projet initial. Certes rien ne garantira l'effectuation de ce possible travail d'extension (de « prolongation ») mais l'action ainsi régionalement restreinte se sera dotée d'une espérance légitime en ce que sa longue marche n'est pas vaine et pourra légitimement ambitionner une victoire globale (et non plus restreinte).

Portée globale de l'action restreinte

Au total, l'action restreinte (entendue comme action constituant une région par unification de deux localisations disparates) se sera dotée d'une **légitime confiance en ses ambitions globales**, confiance interdite à la seule action locale et inaccessible à toute action prétendant (imaginairement) traiter immédiatement de la situation globale.

...