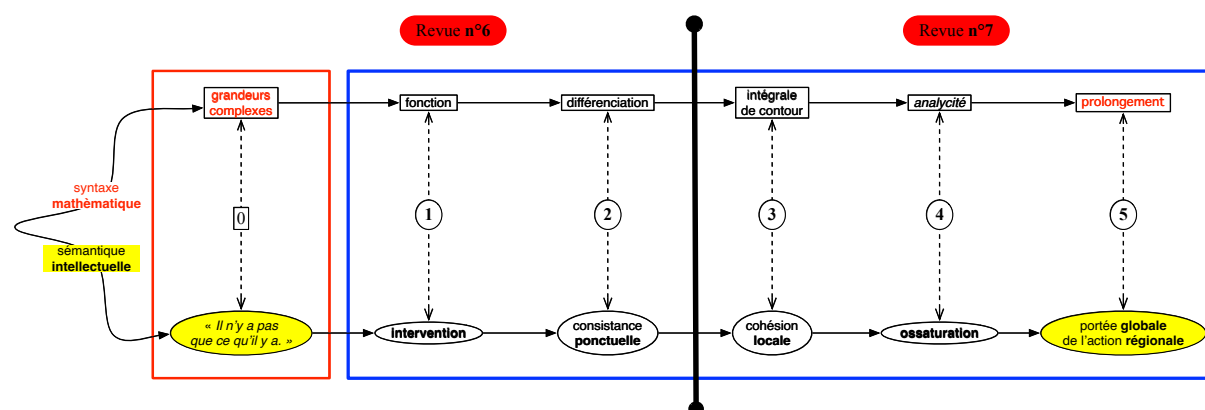


[RESSOURCES MATHÉMATIQUES]

FRANÇOIS NICOLAS : *THEOREME DE L'ACTION REGIONALEMENT RESTREINTE (2)*

« Une volonté, à l'insu, qui dure une vie, jusqu'à l'éclat multiple »
Mallarmé (*L'action restreinte*)

Reprenons notre étude à l'endroit où nous nous étions arrêtés ¹ :



Après examen dans le précédent numéro des deux premières correspondances (entre syntaxe mathématique et sémantique intellectuelle) indiquées dans le schéma ci-dessus :

- 1) Fonction / Intervention
- 2) Différenciation / Consistance ponctuelle

examinons les trois dernières :

- 3) Intégrale de contour / Cohésion locale
- 4) Analyticité de la fonction / Ossaturation cohérente de l'intervention
- 5) Prolongement / Portée globale

ENJEUX INTELLECTUELS

Rappelons les enjeux **pour nous** de cette étude mathématique, c'est-à-dire en quoi cette théorie mathématique dite « du prolongement analytique » constitue une « ressource » pour une intellectualité communiste de type nouveau.

Sortir du face à face stérile *local* / *global*

Il s'agit de **sortir de l'alternative local/global**, politiquement stérile, le « penser global » n'atteignant « l'agir local » que par surplomb dogmatique ² et « l'agir local » n'accédant au « penser global » que par propagation fantasmagique ³.

¹ Voir l'article du numéro 6 : <https://longues-marches.fr/wp-content/uploads/2025/11/6-F-maths.pdf>

² Extrinsèquement plutôt que par introjection (du plus grand dans le plus petit)

³ Globalisations fantasmagiques de la « convergence des luttes » (de type anarchiste) ou de « la vertu contagieuse du bon exemple » (de type religieux)

Le principe sera de constituer un niveau **régional** dont le caractère restreint (une région relie deux localisations disjointes sans avoir prise sur la globalité de la situation) va venir fonder une légitime ambition globale que l'on entendra ainsi : dans une situation globale donnée, l'action - qui démontre son aptitude à relier **d'un même geste** deux lieux séparés (donc à se déplacer minimalement d'un lieu à un autre) et ainsi à transformer un « entre-lieux » amorphe en un réseau régional - se dote ipso facto d'une puissance à prolonger son réseau à travers la situation globalement concernée.

Local et régional

Attention cependant à deux aspects essentiels.

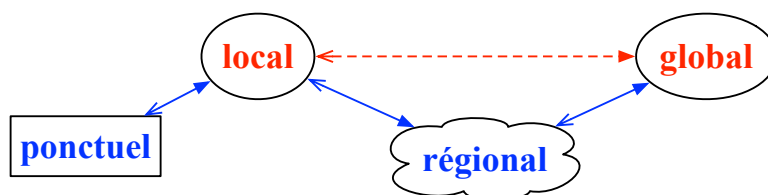
- Il faut d'abord que l'intervention qui a commencé par traiter un **point** de la situation (son point de départ) fasse ensuite ses preuves **autour** de ce point (techniquement dit : dans un voisinage de ce point par contour de ce point) – disons que l'intervention doit commencer par établir sa **cohésion locale** après avoir établi (par différentiabilité) sa **consistance ponctuelle** ; l'examen de ce premier aspect sera l'objet de notre partie 3.
- Ensuite, la puissance globale ainsi gagnée n'assure aucunement l'effectivité de l'intervention sur **toute** la situation mais seulement sa capacité de la prolonger (de la continuer) **de part en part** de la situation concernée – autrement dit, l'intervention a une légitime **ambition globale** mais nullement l'assurance d'une **validité totale**.

En effet, la prolongation régional→global va rencontrer trois limitations :

- 1) d'abord prolongation **potentielle** ne veut pas dire prolongation **effective**, c'est-à-dire effectivement délivrée clef en mains par son état régional – autant dire que reste à mettre en œuvre cette prolongation par progression effective d'une région à une région proche (tout un travail reste donc à faire, avec sa part irréductible d'inventivité, donc d'erreurs et de corrections) ;
- 2) ensuite, la prolongation réalisable ne sera pas forcément unique mais formera une **gerbe** de différentes prolongations dont on pourra cependant établir l'**équivalence** ;
- 3) enfin la potentialité **globale** (de part en part) ne sera pas a priori **totale** car la prolongation pourra buter sur d'éventuels points singuliers de la situation concernée (des trous, des plis, des fronces...) qu'il faudra alors trouver moyen de **contourner**.

L'examen de ce second aspect sera l'objet de nos parties 4 et 5.

Au total, on aura ainsi réussi à s'extraire du **face à face local/global** à la fois par insertion de la **région** entre les deux (en aval du local et en amont du global) et par établissement d'un **point** (cette fois en amont du local) en sorte que le niveau *local* se trouvera finalement enserré dans la pince du *ponctuel* et du *régional* :



Intervention militante

Autre rappel avant de nous engager dans nos trois dernières étapes : ce que nous appelons intervention-action est mathématiquement formalisable comme « fonction complexe » sur le corps $\mathbb{C}$ des complexes.

Ceci veut dire (et nous y avons consacré tout un article dans le numéro 5 de la revue ⁴) que l'action en question est spécifiquement **militante** : elle vise en effet à transformer la situation d'intervention en modifiant sa dialectique interne entre effectivités et possibilités – ce que nous formulons en disant qu'il s'agit d'une intervention qui se déploie sous le principe « *il n'y a pas que ce qu'il y a* ».

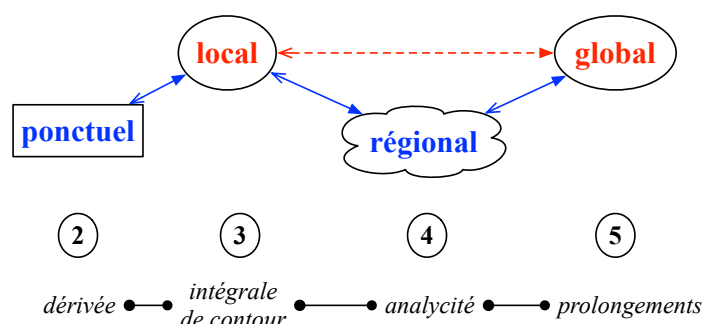
⁴ <https://longues-marches.fr/wp-content/uploads/2025/09/5-F-maths.pdf>

C'est seulement à la condition expresse d'être de ce type **militant** (et non pas d'un type **gestionnaire**) - techniquement dit : d'être une fonction « complexe » et non pas une fonction « réelle » - que cette action restreinte se dotera de la légitime puissance globale que nous cherchons à cerner.

•

Une fois rappelée la grande différence entre fonctions réelles (sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels) et fonctions complexes (sur le corps $\mathbb{C}$ des grandeurs complexes) – les fonctions complexes sont beaucoup plus difficilement différentiables mais les fonctions complexes qui sont différentiables ont d'extraordinaires propriétés de rigidité cristalline que n'ont pas les fonctions réelles différentiables -, engageons-nous dans les trois dernières étapes de notre parcours mathématique en examinant successivement :

- 3) comment une fonction complexe différentiable (dont la **consistance ponctuelle** est alors assurée par « les conditions de Cauchy-Riemann » examinées précédemment) engendre **une intégrale de contour** (assurant sa **cohésion locale** aux voisinages du point de départ) – le point-clef va être ici le passage d'une **différentielle** à une **intégrale** ;
- 4) comment consistance ponctuelle et cohésion locale ainsi établies, la fonction en question (dite *holomorphe* car définie sur tout le plan ⁵) s'avère dotée d'une miraculeuse rigidité algébrique (la fonction est développable en séries entières – une sorte de polynôme infini) nommée **analyticité** ;
- 5) comment cette analyticité de la fonction lui autorise alors des **prolongements** (dits *analytiques*) par recollement de proche en proche à travers la globalité du domaine de définition (sous condition qu'il n'y a pas de trous ou de singularités intrinsèques sur lequel ce prolongement buterait).



3. INTEGRALE DE CONTOUR / COHESION LOCALE

Contentons-nous ici de présenter les principales étapes de la construction mathématique, sans prendre le temps de leurs démonstrations. ⁶

Il va nous falloir, dans l'espace propre des fonctions complexes :

- a) d'abord construire une intégrale le long d'un chemin,
- b) puis le long d'une boucle
- c) pour enfin établir la « *formule intégrale de Cauchy* ».

a) Intégrale (complexe) le long d'un chemin

L'idée directrice est d'intégrer une fonction $f(z)=x+iy$ le long d'un chemin donné γ ⁷ allant, dans le plan complexe $\mathbb{C}$, d'un point **a** à un point **b**. Pour cela,

⁵ *hólos* = tout, entier, complet

⁶ Pour plus de détails, voir la cinquième (6 février 2022) des *Huit leçons de mathématiques modernes* (2021-2022, Théâtre *La Commune* d'Aubervilliers) : https://fnicolas1947.fr/mathematiques/#flipbook-df_1940/1/
Pour un bon manuel d'analyse complexe, voir Ian Stewart & David Tall : *Complex Analysis* (Cambridge University Press, 2^e édition 2018).

⁷ Chemin *fini* (non fractal), *continu* (sans sauts) et *lisse* (sans aspérités).

- 1) on paramètre ce chemin par la variable réelle t :

$$\forall t \in [a, b] \subset \mathbb{R} \text{ on a } \gamma(t) = \{x(t), y(t)\} \in \mathbb{C}.$$

- 2) puis on intègre $f(z)$ le long de $\gamma(t)$:

$$\int_{\gamma} f(z) = \int_a^b f[\gamma(t)] \cdot \gamma'(t) \cdot dt$$

Trois précisions

Deux précisions mathématiques

- Ce paramétrage de la fonction complexe f sur le chemin complexe γ par un nombre réel t vient ordonner ce parcours dans un plan qui, comme l'on sait, n'admet pas de bon ordre.⁸
- Si la fonction f admet une primitive F , on a alors

$$\int_a^b f[\gamma(t)] \cdot \gamma'(t) \cdot dt = F[z(b)] - F[z(a)]$$

et l'intégrale sur le chemin allant de **a** à **b** ne dépend alors plus de ce chemin mais seulement de ses deux extrémités.

Le point est ici que l'existence d'une telle primitive est moins assurée dans le cas complexe que dans le cas réel : sur $\mathbb{R}$, toute fonction continue a une primitive mais ce n'est plus le cas sur $\mathbb{C}$ car une fonction complexe continue mais non différentiable ne peut avoir de primitive.

Une précision intellectuelle

- Nouveauté importante : notre intégrale **chemine** du point **a** au point **b** en les reliant selon l'opération d'une même fonction.
C'est précisément en cet endroit que l'idée de **région** s'introduit s'il l'on nomme *région* non pas le passage d'un point **a** à son environnement immédiat (à son voisinage local) mais le passage d'un point **a** à un autre point **b** clairement séparé du premier⁹.
Cette idée de région est pour nous décisive : elle distingue le travail **localiste** (qui opère autour de l'endroit où l'on est sans se déplacer en un autre lieu) du travail **militant** qui se déplace pour nouer, selon une même idée intervenante, deux lieux séparés (une usine et un quartier populaire, un lycée et un bidonville, un pays et un autre, etc.).

Différences mathématiques

Où l'on retrouve les importantes différences entre fonctions réelles et complexes :

- dans les deux cas, une fonction différentiable est **continue** (mais pas l'inverse) ;
- mais les fonctions réelles ont cet avantage que, si elles sont continues, elles ont alors une **primitive**, et ce même si elles ne sont pas différentiables ;
- quand, de leur côté, les fonctions complexes ont cet avantage capital que si elles sont différentiables, elles le sont alors indéfiniment.

Respiration

Rappelons **les enjeux intellectuels** de cette exploration mathématique pour ne pas nous ensabler dans sa technicité propre.

Différence entre fonctions réelles et complexes

Les fonctions **réelles** formalisent l'action **gestionnaire** pour qui « *il n'y a que ce qu'il y a [d'effectif]* » quand les fonctions **complexes** formalisent l'action **militante** pour qui « *il n'y a pas que ce qu'il y a [d'effectif] car il y a aussi ce qu'il y a de possible* ».

⁸ Rappelons que c'est la raison pour laquelle il ne convient guère de parler de « nombres » complexes et qu'il vaut mieux parler, comme Gauss l'a fait dès le départ, de « grandeurs » complexes.

⁹ La séparation se formalise par le fait qu'il existe des voisinages de **a** et de **b** qui sont disjoints.

Primitives

Les fonctions complexes, plus difficilement différentiables, sont conséquemment plus difficilement primitives.

Or l'idée mathématique de primitive peut être interprétée comme formalisant le fait que la fonction f dispose d'une **idée directrice** formalisée par $F : F' = f$ qu'on interprètera comme sa *ligne de conduite*, sa *ligne politique*, son *fil rouge* ou son *leitmotiv*...

b) Intégrale (complexe) le long d'une boucle

Nous pouvons maintenant construire une intégrale le long d'un contour fermé – qu'on appellera **boucle** – en identifiant le point de départ **a** et le point d'arrivée **b** du chemin concerné : **b=a**.¹⁰

En nouant les deux extrémités de notre chemin, nous perdons (provisoirement) la précieuse dimension **régionale** et revenons à l'idée d'un simple **voisinage** local du point **a=b**. Mais cette perte va avoir une contrepartie tout à fait remarquable : la formule qui suit.

c) Formule intégrale de Cauchy

On aborde ici une nouvelle précieuse propriété des fonctions complexes, sans égale dans les fonctions réelles : la valeur d'une fonction complexe en un point donné z_0 va être entièrement déterminée par ses valeurs sur un contour de ce point ! Autrement dit, l'intégrale de f autour du point z_0 **s'introjecte** comme valuation de $f(z_0)$.

Techniquement formalisée, la formule intégrale de Cauchy est la suivante :

- soit f différentiable dans le domaine Ω (un ouvert sans trou du plan général d'intervention $\mathbb{C}$) ;
- soit γ une boucle simple (un seul tour) orientée positivement (dans le sens trigonométrique du plan) contenue dans ce domaine d'intervention Ω ;
- soit z_0 un point intérieur à cette boucle γ .

On aura alors :

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

c'est-à-dire que $f(z_0)$ est donnée par l'intégrale de f le long du chemin faisant le tour de z_0 .

Interprétation

Selon notre interprétation intellectuelle, cela veut dire que l'effet d'une intervention $[f]$ en un point $[z_0]$ équivaut aux effets de cette même intervention $[f]$ tout au long d'un contour de ce point.

Autrement dit, si l'on renverse cette équivalence, intervenir **en faisant le tour** d'un point équivaut à intervenir **en ce point**¹¹ :

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0)$$

Intuitionnons la portée intervenante de ce principe : évaluer les effets d'une intervention $[f]$ en un point $[z_0]$ d'une situation donnée équivaut à évaluer ses effets **tout autour** de ce point.

N'en va-t-il pas ici par exemple de tout travail éducatif s'il est vrai qu'intervenir éducativement sur une personne (un enfant, un élève...), c'est avant tout intervenir sur ses rapports (sociaux...) à son environnement le plus immédiat !

¹⁰ Au demeurant, on sait également construire un chemin par collage (somme) de petits bouts de chemin.

¹¹ À condition cependant que le point en question soit détaché de toute singularité faisant alors **obstruction** à son contour.

4. ANALYCITE DE LA FONCTION / OSSATURATION DE L'INTERVENTION

Mathématiques

Nous arrivons au point proprement miraculeux des fonctions complexes différentiables : toute fonction différentiable est indéfiniment différentiable ce qui autorise alors son développement en séries entières, soit cette propriété dite d'« analyticité » qui la dote d'une rigidité cristalline, prolongeable au-delà de son domaine initial de constitution.

Le miracle va consister à passer de l'**analyse** (infinité **continue** de $\mathbb{R}$)   l'**algèbre** (infinité **dénombrable** de $\mathbb{N}$) en développant en série entière notre « formule intégrale de Cauchy ».

L'idée mathématiquement directrice est la suivante.

Puisque l'on sait que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

utilisons le développement suivant en séries entieres de $\frac{1}{z - (z_0 + h)}$:

$$\frac{1}{z - (z_0 + h)} = \sum_{i=0}^n \frac{h^i}{(z - z_0)^{i+1}} + \text{reste}_n$$

avec $\text{reste}_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$

pour déduire cette formule :

dans tout disque C de centre z_0 et de rayon R , on a pour $|h| < R$:

$$f(z_0 + h) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n h^n$$

avec

$$a_n = \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \right]$$

On a ce faisant réalisé une algébrisation locale de notre fonction f en un polynôme infini (  valeur locale), qui formalise la structure cristalline de notre fonction complexe, autorisant alors sa prolongation par croissance cristalline.

On dira alors qu'une fonction complexe sur un domaine D de $\mathbb{C}$ est **analytique** si, en tout point z de D , elle a une expansion en séries entieres du type :

$$f(z + h) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n h^n$$

En un sens, être analytique désigne une propriété **algébrique** (polynômiale) de la fonction.

On démontre alors que le développement en série entière autour d'un point donné est unique et que, la fonction f étant indéfiniment différentiable, les coefficients a_n de son développement sont ceux de sa série de Taylor, mobilisant les dérivées ni mes $f^{(n)}$ de f :

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Interprétation

Scansion : local/global

Faisons d'abord attention à un point : la fonction analytique f n'est pas pour autant devenue un polynôme ! On sait seulement qu'autour de z_0 , elle équivaut (à l'infini) au polynôme $P(z_0) = \sum a_n h^n$; mais bien sûr ce polynôme diffère en tout point.

Où l'on mesure à nouveau le gouffre entre local et global : notre fonction f , partout **localement** équivalente à un polynôme infini, n'est pas pour autant **globalement** un unique polynôme infini !

Autrement dit, le global n'est pas une généralisation du local, et les propriétés globales ne sont nullement des propriétés partout valides ; ce sont des propriétés d'un type propre, qui concernent le domaine saisi d'un seul tenant et non plus comme ensemble de points ou recollage de voisinages.

Ainsi ce qui fait la structure propre du global, ce n'est pas l'unité d'une sommation ou d'une généralisation de localisations mais une unité sui generis, d'ordre indécomposable.¹²

« Analycité » ?

Comment comprendre la propriété d'analycité de la fonction intervenante, c'est-à-dire la structure de rigidité cristalline qui découle de sa décomposition algébrique en polynôme infini (« séries entières ») ?

Rigidité cristalline

Retenons bien que tout ceci procède du fait que la fonction f s'est « algébrisée » selon une somme infinie de monômes : $f = \sum a_i x^i$, fait que nous avons interprété métaphoriquement comme constitution cristalline.

Autrement dit, notre intervention militante, en assurant sa cohérence (algébrique) ponctuelle, s'est dotée d'une **rigidité** qui tient une position intermédiaire entre **fluidité** et **solidité** : ni malléable à merci (opportunisme), ni fixée dans le marbre (dogmatisme), l'intervention est fermement ajustable aux nouvelles conditions qu'elle va rencontrer de proche en proche.

Puissance extensive

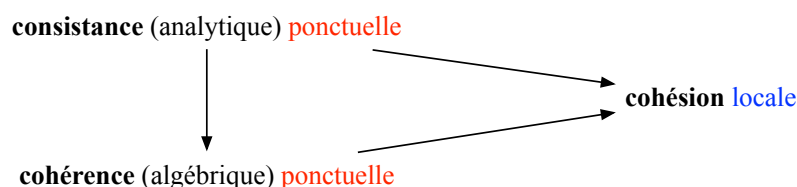
D'où l'**envers bénéfique de la difficulté** à différencier f en un point c'est-à-dire, comme on l'a vu¹³, à assurer la consistance ponctuelle de l'intervention - quand on opère selon le principe militant « il n'y a pas que ce qu'il y a » !

Quand on intervient en **gestionnaire** selon le principe thatchérien « il n'y a que ce qu'il y a », la chose est simple car on se contente alors de préserver une cohérence « factuelle » des effectivités.

Mais adjoindre les possibilités complique singulièrement le problème :

- parce que ces « possibilités » ne se présentent pas sous une modalité obvie,
- et parce qu'intervenir implique alors un ensemble de mutations entre effectivités obvies et possibilités équivoques.

Fixons le vocabulaire suivant :



On voit alors qu'en assurant sa **consistance** analytique et par là sa **cohérence** algébrique en un point, l'intervention militante se dote

¹² Techniquement dit dans le langage de la théorie des catégories, le global est plus un **produit** (limite projective) qu'une **somme** (colimite injective).

¹³ Nous avons examiné ce point dans l'article du numéro 5.

- d'abord d'une **cohésion** locale (autour de ce point),
- puis d'une ambition à relier, selon ce même principe localement consolidé, un autre point en sorte de valider **régionalement** ce que l'on pourra désigner désormais comme une **ligne d'intervention**.

C'est l'existence de cette ligne régionale qui va ensuite autoriser son extension de part en part de la situation globale.

Notons que la « ligne » en question s'aborde à partir du bas (d'un point), et non pas, comme une ligne « léniniste », à partir du haut (de la situation dans son ensemble). Disons que c'est une ligne militante par temps de confusion générale, **une ligne d'exploration** partant de points névralgiques pour suivre dynamiquement les méridiens qui s'y entrecroisent (où l'on retrouve notre « doctrine provisoire de l'acupuncture militante »¹⁴).

5. PROLONGEMENT ANALYTIQUE / PORTEE GLOBALE DE L'INTERVENTION

Mathématiques

Au terme de ce périple, arrivons à notre principal résultat : une fonction complexe différentiable étant analytique s'avère être analytiquement **prolongeable**.

Voyons de quelle manière précise comprendre ce que « prolongement analytique » veut ici dire.

La difficulté va tenir au fait que le développement en séries entières n'est pas **uniforme**¹⁵ sur le domaine de définition de la fonction f . C'est en ce point de difficulté que vont intervenir **Weierstrass** puis Riemann. Contentons-nous ici d'intuitionner ce prolongement selon la modalité avancée par le premier.

Différencions deux cas selon que le prolongement va être direct ou indirect.

Prolongement direct

Théorème d'identité

Si deux fonctions différentiables sont égales sur un ouvert Ω ayant un **point d'accumulation** dans D , alors elles sont partout égales.

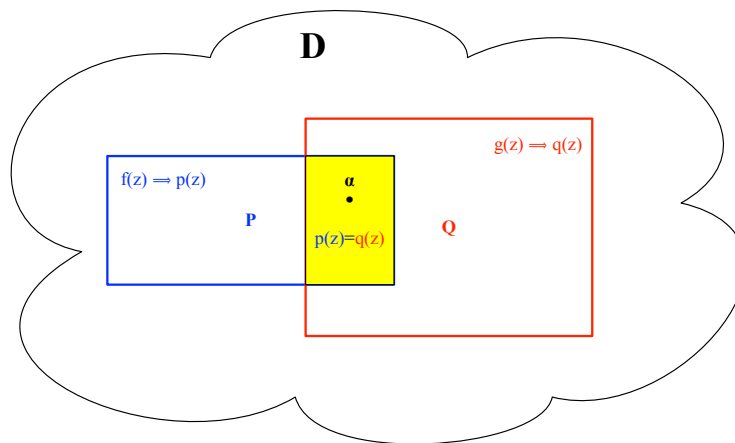
L'idée sous-jacente – métaphoriquement dite - est que Ω ne doit pas flotter sur D mais lui être ancré par un point d'accumulation, qui opère alors comme **point de capiton** puisque, dans ce cas, ce qui vaut pour tout Ω vaudra pour tout D !

Prolongement

- Soient $f(z)$ et $g(z)$ deux fonctions analytiques sur le domaine D .
- Soient P et Q deux ouverts de D d'intersection non nulle qui comportent un point d'accumulation commun a .
- Soient $p(z)$ et $q(z)$ les développements en série entière de f **sur P** et de g **sur Q** .
- Alors, si $p(z)=q(z)$ sur l'intersection $P \cap Q$, on aura $f(z)=g(z)$ sur tout D .

¹⁴ Voir l'article du numéro 2 (juin 1024) : <https://longues-marches.fr/wp-content/uploads/2025/09/2-F-Anclois.pdf>

¹⁵ Au même sens qu'on distingue continuités **simple** et **uniforme** : dans la continuité **simple**, quand on pose « $\forall \varepsilon \exists \delta$ tel qu'à proximité de x on a ceci et cela... » δ dépend de x [c'est un $\delta(x)$] alors que la continuité est **uniforme** si δ ne dépend plus de x et est partout le même sur le domaine de définition. Autrement dit, il y a une même condition globale, partout valable, pour la continuité uniforme quand la continuité simple est sous conditions strictement locales.



Prenons mesure de l'opération :

- On restreint d'abord D à deux sous-espaces P et Q sur lesquels f et g ont chacun leur propre développement en série entière p et q .
- Puis on restreint ces deux sous-espaces à leur intersection $P \cap Q$.
- Le résultat inattendu est alors que l'égalité des développements $p(z)$ et $q(z)$ sur cet espace restreint (partagé par P et Q) vaut égalité des fonctions originales $f(z)$ et $g(z)$ sur tout le domaine.

Au total, l'enchaînement de trois réductions – 1°) de f à p et de g à q , 2°) de D à $P \cap Q$, 3°) de $P \cap Q$ à $P \cap Q$ – autorise à remonter de **$p=q$ sur $P \cap Q$ à $f=g$ sur D !**

On dira dans ce cas que g prolonge directement f (et inversement).

Prolongement indirect

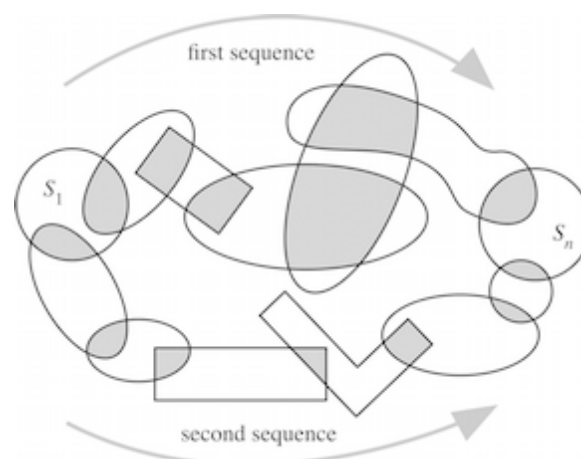
Si l'on ne peut ainsi prolonger **directement** par pure et simple **égalité** des fonctions, on va construire un prolongement **indirect** entre fonctions **équivalentes** (c'est-à-dire fonctions dont les développements seront les mêmes sur une zone d'intersection commune) : dans notre exemple, si a n'existe pas, on n'a plus $f(z)=g(z)$ mais l'égalité $p(z)=q(z)$ sur $P \cap Q$ signifiera que $g(z)$ prolonge $f(z)$ sur tout Q .

On peut ainsi, de proche en proche, prolonger $f(z)$ sur tout D (à condition – rappelons-le – que D ne comporte pas de singularités internes).

Unicité ?

Dans le cas d'un tel prolongement indirect, reste alors un point : ce prolongement est-il unique (comme dans le cas du prolongement direct assuré par simple égalité) ?

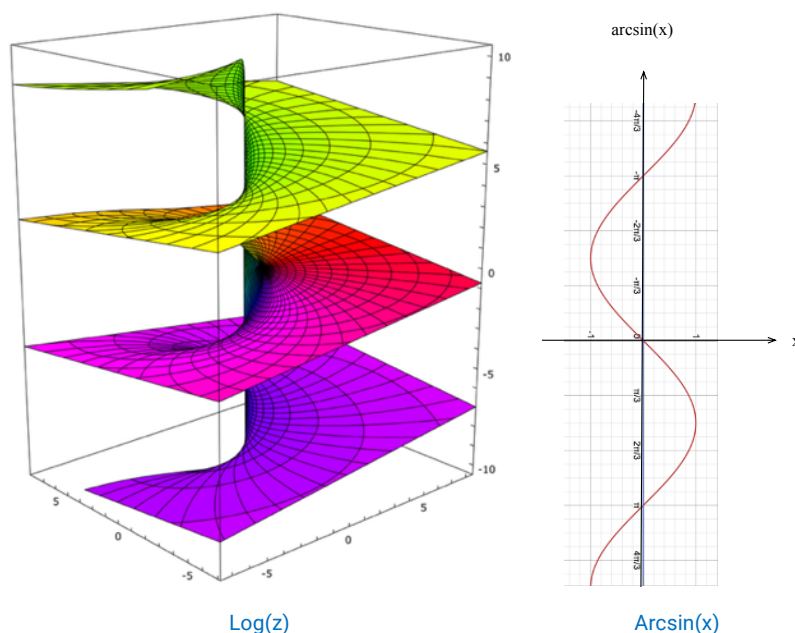
Autrement dit dans le schéma ci-dessous, si on prolonge le même lieu de départ S_1 par le haut (« *first sequence* ») ou par le bas (« *second sequence* ») pour parvenir au même lieu d'arrivée S_n , le résultat sera-t-il le même ?



La réponse est « Non ! » ce qui correspond au fait que les fonctions complexes concernées sont alors multiformes (ou multivaluées) c'est-à-dire que $f(z)$ n'est pas unique !

Illustrons cela avec la fonction réelle $f(x)=\sqrt{x}$ qui est multiforme : par exemple $f(4)$ a deux solutions $\sqrt{4}=\pm 2$!

Ce caractère multiforme des fonctions complexes s'interprète géométriquement dans le cadre des **variétés riemanniennes** qui sont des surfaces à plusieurs feuillets superposés telle celle ci-dessous pour la fonction $\log(z)$ - on en a un équivalent avec la fonction réelle $\arcsin(x)$ définie sur $[-1, 1]$ si l'on ne limite plus ses solutions à l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$.



Ainsi la fonction analytique est bien prolongeable (tant qu'on ne bute pas sur une éventuelle singularité du domaine) mais cette prolongation peut être feuilletée, multiforme, non unique.

Interprétation

Si notre intervention militante, se disposant sous le principe « il n'y a pas que ce qu'il y a », est arrivée à assurer sa consistance et sa cohérence (intervenante) en un point puis sa cohésion (intervenante) entre deux points séparés, alors elle s'est dotée d'une puissance intervenante à échelle de toute la situation concernée.

Qu'est-ce à dire exactement ?

Ce n'est pas que l'intervention va pouvoir se contenter de **répéter** ailleurs ce qu'elle a établi régionalement (ne serait-ce que parce que son emprise régionale a déjà nécessité, comme on l'a vu plus haut, des **ajustements** endogènes pour passer d'un point à un autre – tel est l'enjeu de son « développement en séries entières »). C'est plutôt qu'elle va devoir « **bricoler** » une extension qu'elle ne saurait « planifier ».

Où l'on retrouve la différence entre « planification socialiste » (constructivisme des ingénieurs) et « bricolage communiste » (généricité des masses).

Cette extension (bricolée plus que planifiée) au travers de la situation concernée, va alors rencontrer deux limitations.

- a) **La situation** en question **n'est pas homogène** : la logique d'existence qui lui donne consistance de monde ¹⁶ comporte des **singularités** (celles-là même sur lesquelles d'éventuels événements viendront opérer selon une mutation en éclipse) : essentiellement des « zéros » ou des « trous » (des « riens » susceptibles de devenir des « touts » : « *Nous ne sommes rien, soyons tout* »), et des plis ou des fronces (lieux singuliers où des contradictions globales sont rendues indiscernables,

¹⁶ Logiques des mondes d'A. Badiou

indiscernabilité se manifestant alors par une propriété phénoménale particulière, telle la pointe piquante d'un cône lisse).

En l'absence d'événements, l'extension de l'intervention prendra acte de ces singularités pour se poursuivre en les **contournant**. En quelque sorte une telle intervention opérera ainsi un relevé cartographique de la situation dans son ensemble, devenant susceptible d'inspirer plus tard un éventuel type nouveau d'intervention.

- b) A priori, **le prolongement ne sera pas unique** : en effet si l'espace des effectivités est **bien ordonné**, celui des possibilités ne l'est pas et s'avère par contre **feuilleté** en sorte que toute possibilité va se présenter comme un mille-feuilles de possibles équivalents dans lequel intervenir impliquera de privilégier un parcours plutôt qu'un autre.

L'expérience militante connaît bien ce principe : par exemple si telle usine ou tel quartier ou tel lycée pointe une possibilité d'intervention militante, l'intervention effective (tel jour à telle heure) devra inéluctablement tirer parti des rencontres contingentes (en ce jour et à cette heure) avec tel ouvrier, telle femme du peuple, tel lycéen plutôt qu'avec tels autres – il serait parfaitement absurde d'attendre une imaginaire exhaustion des rencontres possibles pour faire bilan de l'intervention !

BILAN

Pour conclure, compacions le parcours de notre étude.

Mathématiquement...

On a établi ceci : si une fonction **complexe**, constituée sur une région S du plan $\mathbb{C}$, y est **différentiable**, alors elle l'est indéfiniment en sorte de devenir **analytique** (c'est-à-dire développable en séries entières) et, par là, **prolongeable** à travers l'ensemble du plan au-delà de son domaine initial de définition S .

Deux réserves cependant :

- ce prolongement a priori ne sera **pas unique** (les différents prolongements ne seront pas identiques mais seulement « équivalents ») ;
- et ce prolongement peut buter sur **des lieux infranchissables** (« singularités ») que le prolongement ne pourra alors que contourner.

Intellectuellement...

« J'ai mené le bon combat et l'ai mené jusqu'au bout ! »

Paul de Tarse (transmettant à Timothée le flambeau de sa foi)

Résumons notre interprétation intellectuelle à la lumière de l'action restreinte mallarméenne.

« **Une volonté, à l'insu, qui dure une vie, jusqu'à l'éclat multiple** »

Interprétons ainsi Mallarmé :

- « **une volonté** » désigne l'action intervenante, dotée d'un projet régionalement soutenu ;
- « **à l'insu** » indique qu'à proprement parler, il ne s'agit pas de construire/planifier un développement global mais de poursuivre/prolonger ce qui est régionalement engagé en bricolant, étape par étape, les effets de l'action intervenante ;
- « **qui dure une vie** » suggère le prolongement indéfini ;
- « **jusqu'à l'éclat multiple** » indexe la lumière globale ainsi engendrée par la gerbe des prolongements.