ATELIER *MAMUPHI* SUR LE FORCING

François Nicolas

Ircam (Paris), les 21 novembre 2026, 12 décembre 2026 et 23 janvier 2027 de 10h à 13h

https://mamuphi.fr/ecole/

ENJEUX

Point de départ

Soit une situation-monde donnée **M**.

Bien sûr, cette situation est infinie et ses ressources-parties non recensées [3] [$\wp(M)$] excèdent sans mesure son état effectif [$\|\wp(M)\| \gg \|M\|$] [4].

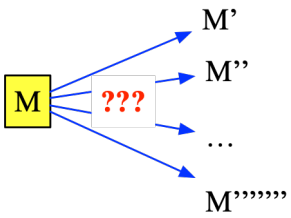
Exemples, dans une situation-monde donnée, de ressources-parties non répertoriées :

- en musique, les nuances non inscrites dans la partition ;
- en politique, les rapports sociaux demeurant inorganisés ;
- en amour, les composantes de la vie commune non prises en mains par le couple.

Projet

0) On veut **étendre** notre situation-monde M en une nouvelle situation M' préservant la structure de M mais dotée de nouvelles propriétés désirables.

Bien sûr, on peut ainsi étendre M d'une infinité de manières différentes, en partie incompatibles entre elles. [5] Le projet repose donc sur le choix d'une extension privilégiée.



1) Pour ce faire, on **adjoint** à M pour nouvel élément une de ses innombrables parties-ressources non répertoriées qu'on appellera **G** : M→M[G]=**M'**

2) On veut assurer que la nouvelle situation étendue M' garde les propriétés structurelles de M - en quelque sorte, cette extension M' ne doit pas relever de la science-fiction mais préserver et prolonger la structure de M. Mais on veut cependant que l'extension soit qualitative (plutôt que quantitative) : la nouvelle situation-monde M' doit être dotée d'une nouvelle propriété structurelle qui émerge de sa structure partagée avec M. Disons que M' doit étendre M en la dotant d'une **superstructure** émergente.

Pour ce faire, il est nécessaire de bien choisir la partie G à adjoindre : il faut ainsi qu'elle soit générique sur l'un des ordres [appelons-le $\mathbb{P}$] qui (infra)structurent M – d'où l'importance de sélectionner la bonne structure d'ordre sur M en fonction de l'extension visée.

---

[3] Ce sont des parties dont l'existence *dans M* reste en quelque sorte « clandestine ».

[4] Théorème de Cantor : l'immense majorité des parties d'un ensemble donné ne lui appartiennent pas (et lui sont donc « clandestines »).

[5] Elles peuvent coexister « pacifiquement », dans une juxtaposition indifférente mais elles ne peuvent simultanément opérer, telle sur une route donnée une bifurcation dessinant plusieurs prolongations possibles sur la même carte mais imposant à tout parcours effectif de décider l'une d'entre elles.

3) On veut enfin pouvoir contrôler de l'intérieur de M la nouvelle propriété structurale attendue de M' : celle qui va découler de la nouvelle dialectique, interne à M', entre son infrastructure commune avec M et sa nouvelle superstructure émergente [6].

   Pour cela, G doit être un **filtre** générique c'est-à-dire un opérateur déposant une limite générique dont il va être possible de contrôler, pas à pas, les propriétés singulières (et ce précisément parce que l'opérateur-filtre est générique).

   > « *La notion de filtre permet de formuler la notion de limite dans toute sa généralité*. » (H. Cartan)

   C'est en ce sens que l'extension sera ici *générique* et pas seulement ensembliste [M[G] ≠ MU{G}]. [7]

4) Ainsi se constitue cette « *implication de type nouveau* » (P. Cohen) qu'est le **forcing** : l'opérateur G, tel un entonnoir, force le processus d'adjonction-extension à déboucher sur l'émergence stratégiquement programmée, mais ce faisant il opère modalement [8] car son implication est sous conditions de la composition générique (et donc diagonalement errante) de G.

   Il ne s'agira donc plus d'**impliquer** une proposition P (comme peut le faire une **théorie** $\mathcal{T}$: $\mathcal{T}\vdash$P), ni de la **valider** (comme peut le faire un **modèle** $\mathcal{M}$: $\mathcal{M}\models$P) mais de **forcer** une possibilité $\mathcal{P}$ (comme seule une **généricité** $\mathcal{G}$ peut le faire : M[$\mathcal{G}$]$\Vdash\mathcal{P}$) : une **possibilité** ($\mathcal{P}$, sélectionnée parmi bien d'autres) se voit **forcée**, au bout du compte et non d'emblée, à devenir **effective**.

Raisonances

Cette adjonction-extension générique est de type nouveau.

- Celle qu'a inventée Galois – l'adjonction-extension *algébrique* (de type $\mathbb{Q}\rightarrow\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$) - était de nature horizontal c'est-à-dire **quantitative** : elle ne modifiait pas les propriétés de corps (ni la nature de ses opérations constituantes – addition, multiplication… - ni la structure de corps, ni d'ailleurs sa cardinalité dénombrable).
- Par contre, l'extension générique est **qualitative** : par émergence « verticale », elle dote [9] la situation étendue de nouvelles propriétés dialectiques internes (infrastructure-superstructure).

Si l'adjonction-extension **algébrique** (puis **ensembliste**) constitue bien un type nouveau - spécifiquement *moderne* - de **révolution** (qui diffère du type *préclassique* par abandon-déplacement et du type *classique* par destruction-reconstruction), l'adjonction-extension **générique** constitue un type de révolution spécifiquement *contemporain*, en particulier contemporain des obstacles et obstructions sur lesquels les différentes modernités (musicales, politiques, amoureuses) ont buté dans les années 1960-1970.

Plan

D'où nos trois séances :

I. examiner la situation de départ ;

II. étudier son développement forcé par émergence d'une extension générique ;

III. parcourir les raisonances intellectuelles de cette percée mathématique.

---

[6] Dans un autre registre métaphorique, pensons ici à la dialectique d'une forêt (avec son infrastructure terrestre) et de sa canopée (superstructure).

[7] La différence tient au fait que dans M' les opérations avec G venant étendre M ne seront plus seulement les opérations ensemblistes prévalant dans M mais seront de type nouveau : de caractère *modal* car opérant sous-conditions du filtre G. C'est en ce sens que cette adjonction-extension *générique* diffère de l'adjonction-extension *algébrique* (Galois) où $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]=\{p+q.\sqrt{2}\}$ avec p et q $\in\mathbb{Q}$: ici les opérations arithmétiques d'addition et de multiplication dans $\mathbb{Q}$ restent inchangées dans $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

[8] Alain Badiou rappelle qu'une telle modalité est ici l'index formel d'un procès subjectif inhérent au forcing.

[9] Via le fait que le filtre G dépose la colimite $\mathfrak{g}$.

I. 21 NOVEMBRE 2026

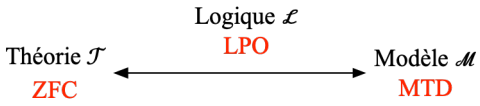
Nous partirons de $\mathcal{T}$: la **théorie des ensembles** telle que formalisée par Zermelo-Fraenkel augmentée de l'axiome de choix [ZFC].

Nous lui associerons $\mathcal{M}$: un **modèle** transitif et dénombrable [MTD].

> ZFC ne peut démontrer l'existence d'un tel modèle (le théorème de Gödel y fait obstruction [10]) mais on peut le démontrer en recourant à l'axiome supplémentaire : « il existe un cardinal inaccessible ».

Nous dialectiserons cette théorie et ce type de modèle selon $\mathcal{L}$: une **logique** du premier ordre [LPO].

Notre situation de travail sera donc la suivante :



Nous l'examinerons en détail lors de la première séance, le 21 novembre.

Théorie des ensembles

- Qu'est-ce qu'un **ensemble** ?
- Axiomatisation des ensembles par Zermelo-Fraenkel [ZF]
- Rôle crucial des trois axiomes : de remplacement, des parties et de l'infini
- Ordinaux et cardinaux
- Paradoxe de Skolem [11]
- Axiome de choix [AC]
- $\Longrightarrow$ ZFC=ZF+AC

Logique du premier ordre

- Qu'est-ce qu'une **logique** ?
- Qu'est-ce qu'une **théorie** ?
- Nécessité d'une logique pour formuler des inférences
- Nécessité d'une logique pour dialectiser déductions *syntaxiques* ($\vdash$) d'une théorie et validations *sémantiques* ($\models$) par un modèle
- Logiques du premier ou du second ordre
- Avantages et inconvénients d'une logique du premier ordre

Modèle de ZFC

- Qu'est-ce qu'un **modèle** ?
- Comment un modèle peut-il valider une théorie ?
- Modèle de la théorie des ensembles
- Modèle transitif
- Modèle dénombrable

---

[10] Si ZFC pouvait démontrer l'existence d'un modèle de sa théorie, cela voudrait dire que ZFC serait cohérente (on démontre en effet qu'une théorie dotée d'un modèle est cohérente) et donc que ZFC démontrerait sa cohérence. Mais Gödel démontre précisément qu'aucune théorie ne peut démontrer sa propre cohérence.

[11] Le **paradoxe de Skolem** énonce qu'une infinité peut être vue comme énorme de l'intérieur d'une situation donnée tout en s'avérant être très restreinte lorsqu'on l'examine en extériorité surplombante.
Mais on peut inverser l'appréhension de cette différence : ce qui, vu de l'extérieur, semble restreint et stérile peut s'avérer de l'intérieur être peuplé de larges ressources fertiles !
On objectera bien sûr à cette inversion qu'il ne s'agirait là que d'une illusion de grandeur : celle d'un myope manquant de recul. Mais le forcing vient répondre à cette objection en attestant d'une puissance intrinsèque (et non pas illusoire) de l'intériorité puisque celle-ci conquiert, *sur ses propres forces*, la capacité de penser et calculer au-delà d'elle-même (en sorte qu'il en va, avec le forcing, d'une capacité d'**ek-sister** à un état donné – à l'ordre établi - de l'existence). Tout ceci légitime donc que les pensées émancipatrices privilégient les intellectualités en intériorité subjective plutôt que les discours positivistes en objectivation surplombante.

II. 12 DECEMBRE 2026

Notre point sera celui-ci : le modèle retenu $\mathcal{M}$ ne saurait trancher les deux questions cruciales suivantes (dont nous détaillerons les enjeux mathématiques et intellectuels) :

- La classe [12] V des ensembles se réduit-elle ou non à la classe L des ensembles constructibles ? [V=L ?]
- L'hypothèse du continu [HC] est-elle ou non inférable de ZFC [ZFC⊨HC ?]

L'idée directrice du travail engagé sur le modèle $\mathcal{M}$ sera la suivante :

- le modèle $\mathcal{M}$ peut s'étendre de différentes manières contradictoires (incompatibles entre elles) en différents **sur**-modèles $\mathcal{M}_i$: $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_i$;
- on veut alors « forcer » $\mathcal{M}$ à s'étendre en un sur-modèle $\mathcal{M}'$ donné (restant MTD de ZFC selon LPO) caractérisé par une nouvelle propriété que $\mathcal{M}$ n'avait pas - en quelque sorte, on force $\mathcal{M}$ à se développer dans un sens préalablement décidé et donc à trancher entre deux avenirs incompatibles.

D'où les deux exemples de « forcing » proposés par Paul Cohen consistant à

- adjoindre d'abord à $\mathcal{M}$ un seul « réel de Cohen » $\mathfrak{g}$ [13] (non constructible dans $\mathcal{M}$) pour forcer ainsi la propriété V≠L dans $\mathcal{M}'$=M[$\mathfrak{g}$] ce qui démontrera alors, puisque $\mathcal{M}'$ reste modèle de ZFC, que ZFC n'impose pas V=L : ZFC⊭(V=L) ;
- adjoindre ensuite ω_2 « réels de Cohen » (non constructibles dans $\mathcal{M}$) pour forcer la propriété non-HC dans $\mathcal{M}''$ ce qui démontrera alors, puisque $\mathcal{M}''$ reste modèle de ZFC, que ZFC n'impose pas davantage l'hypothèse du continu : ZFC⊭HC.

Recette générale du forcing

- Partir d'un MTD de ZFC : $\mathcal{M}$.
- Y distinguer un ensemble partiellement ordonné $\mathbb{P}$ de possibilités, élémentairement reconnu par $\mathcal{M}$ ($\mathbb{P} \in \mathcal{M}$).
- Diagonaliser $\mathbb{P}$ pour y composer un filtre générique G (G⊂$\mathbb{P}$ mais G∉$\mathbb{P}$ et G∉$\mathcal{M}$ [14]).
- Adjoindre à $\mathcal{M}$ le filtre G en sorte d'étendre $\mathcal{M}$ en $\mathcal{M}'$: $\mathcal{M}'=\mathcal{M}[G]$.
- S'assurer que $\mathcal{M}'=\mathcal{M}[G]$ est toujours un MTD de ZFC (selon la LPO).
- Construire dans $\mathcal{M}$ des $\mathbb{P}$-noms (ou *polynoms* [15]) évaluables par G.
- Rendre ainsi G capable d'évaluer **dans $\mathcal{M}$** les propositions **dans $\mathcal{M}'$**.
- Contrôler ainsi, de l'intérieur de $\mathcal{M}$, la validité dans l'extension $\mathcal{M}[G]$ des propriétés escomptées φ : $\mathcal{M}[G] \Vdash \varphi$.

Premier exemple : en faisant émerger du filtre générique G un élément $\mathfrak{g}$ (un « réel de Cohen ») qui vient le récapituler telle une colimite injective ($\mathfrak{g}$=UG), on forcera le sur-modèle $\mathcal{M}'$=M[$\mathfrak{g}$] à valider V≠L.

Second exemple : selon la même logique, on forcera un sur-modèle $\mathcal{M}''$ à valider non-HC.

---

[12] Une classe est un « paquet » - un « sac » - d'ensembles qui ne constitue pas un « ensemble » proprement dit.

[13] $\mathfrak{g}$ est la limite déposée par le filtre générique G.

[14] À la différence de $\mathbb{P}$, G est une partie « clandestine » de $\mathcal{M}$ (donc de $\mathbb{P}$) c'est-à-dire une partie qui n'y est pas « reconnue » ou « présentée » comme élément.

[15] Pensons à la capacité algébrique du polynôme [x^2-2] de nommer **à partir de $\mathbb{Q}$** le nombre irrationnel √2 qui ne lui appartient pas.
Toute la difficulté va alors porter sur le point suivant : si l'on peut ainsi nommer dans $\mathcal{M}$ les nouveaux **objets** de $\mathcal{M}'$, comment nommer dans $\mathcal{M}$ les **opérations** dans $\mathcal{M}'$ sur ces nouveaux objets ?
Ainsi, dans notre exemple algébrique, une chose est de nommer √2 par [x^2-2] et √3 par [x^2-3] ; autre chose est de nommer leur somme (√2+√3) car il s'avère que **le nom de la somme n'est pas la somme des noms** : [(x^2-2)+(x^2-3)=2x^2-5] nomme √(5/2) et non pas (√2+√3).

Le **nom de la somme** est en fait **le produit des noms** puisque [x^2-2].[x^2-3]=0 a pour racines {±√2, ±√3}. Mais le **nom** [x^2-6] **du produit** √2.√3=√6 n'en devient pas pour autant **la somme des noms**.

III. 23 JANVIER 2027

Il s'agira, dans la troisième séance, d'examiner la portée intellectuelle (en particulier « *mamuphique* ») de cette théorie logico-mathématique du forcing.

1) Bilan intellectuel du forcing

Distinguer :

- adjonctions-extensions « horizontales » : Galois (groupes), Dedekind (coupures) ;
- mutations-généralisations : Gauss (nombres→grandeurs complexes), Schwartz (fonctions→distributions), Cartan (limites→filtres) ;
- adjonctions-extensions « verticales » par émergences génériquement forcées : Cohen.

Les premières sont des agrandissements **quantitatifs** ; les deux autres sont d'ordre **qualitatif** (elles modifient les opérations internes constituant l'espace concerné et par là ses caractéristiques globales).

Distinguer les trois implications *déduire* (⊢), *valider* (⊨) et *forcer* (⊩) en sorte de forcer (⊩) la validation (⊨) d'une déduction (⊢) c'est-à-dire de démontrer une possibilité en dictant ses conditions de possibilité. [16]

2) Précautions à prendre dans les transpositions intellectuelles

- Comment passer des **ensembles** aux **objets** mathématiques puis aux **choses** non-mathématiques
- Comment passer d'un **modèle** transitif et dénombrable aux **situations** non-mathématiques de pensée
- Comment passer d'une **logique** du premier ordre aux **rationalités** non-mathématiques
- Comment passer des opérations logico-mathématiques de **forçage** aux opérations intellectuelles venant dicter les conditions d'une extension générique

3) Le forcing dans les intellectualités contemporaines

- Le travail des vérités dans la **philosophie** d'Alain Badiou (*L'être et l'événement*) : un événement engage un processus subjectivé pour forcer l'émergence d'une vérité apte à étendre génériquement la situation de départ.
- Pour l'intellectualité **musicale** contemporaine : comment l'écoute d'un discours musical « force-t-elle » une diagonale générique dans la perception acoustique des plasticités sonores ? Qu'en est-il musicalement de l'électro-acoustique : abandon-déplacement (*performances et plasticités sonores*) et mutation-généralisation (*musique électroacoustique*) ou adjonction-extension (*instrumentalisation musicale de l'électroacoustique*) ?
- Pour l'intellectualité **politique** contemporaine : comment « forcer » une diagonalisation du vieux principe marxiste de « dictature du prolétariat » ? Comment « forcer » l'émergence extensive d'une culture communiste ? Comment « forcer » une extension communiste de la construction du socialisme ? [17]
- Pour l'intellectualité **amoureuse** contemporaine : comment un amour hétérosexuel vient-il, dans des rapports socialement « genrés », « forcer » l'émergence d'une diagonale émancipatrice dans les relations sexuées entre hommes et femmes ?

[16] En un certain sens, les Thèses d'Avril de Lénine en 1917 visaient à forcer la possibilité de la Révolution d'Octobre.

[17] Si l'on note **S** le socialisme et **CP** les Communes populaires, cette extension communiste de la construction socialiste peut se formaliser ainsi : **S→S[CP]** ?

DIDACTIQUE DE L'ATELIER

Ces séances sont ouvertes à tous.

Ne dissimulons pas la difficulté ! Ces séances s'attacheront à tenir simultanément deux impératifs :

- comprendre en intériorité le discours logico-mathématique selon sa dialectique immanente entre idées directrices et formalisation littérale ;
- l'interpréter, en venant moins le **surplomber** (d'un métadiscours « sur » les mathématiques) que **le doubler** de résonances parallèles et de retentissements orthogonaux.

> « *Traverser en un éclair toute la largeur du fleuve qu'encombrent d'agiles jonques chinoises faisant voile en tous sens - ainsi naît le sens de la parole poétique. Cet itinéraire, impossible de le retracer en interrogeant les bateliers : ils ne sauraient dire de quelle manière ni pourquoi nous avons sauté d'une jonque à l'autre*. » Ossip Mandelstam (1933)

Il sera cependant possible à quiconque de les suivre sans s'y perdre ou s'y noyer si chacun accepte d'y cheminer de concert *au moins en pointillés*, *sautant d'éclaircie en éclaircie, progressant d'assise en assise, supportant les moments de désorientation*, en sorte au final d'intuitionner le parcours dans sa globalité (et sans pour cela avoir nécessité de restituer la succession exacte des appuis qui lui ont permis une traversée jusqu'à la terre ferme).

•••