[RESSOURCES MATHEMATIQUES]

FRANÇOIS NICOLAS : *OBSTACLES ET OBSTRUCTIONS*

ENJEUX DE CETTE ETUDE

La mathématique moderne (depuis 1830) et contemporaine (depuis 1945) différencie et dialectise obstacles et obstructions jusqu'à expliciter une ***théorie de l'obstruction*** [1].

Distinguer et dialectiser *obstacles* et *obstructions* s'avère une nécessité intellectuelle tout à fait générale : pour ne parler que de notre intellectualité politique, une telle clarification concerne directement la possibilité de comprendre la fin de la Révolution communiste chinoise (1958-1976) non comme une simple **défaite** (accordant alors la responsabilité principale du revers à la force supérieure de l'ennemi de classe) mais surtout comme un **échec** (reconnaissant plutôt l'incapacité du camp révolutionnaire à résoudre sur ses propres forces les nouvelles contradictions que les soulèvements des Communes populaires puis de la Révolution culturelle ont levées).

> « *Si nous sommes vaincus, nous n'avons d'autre choix que de repartir de zéro en menant à bien un travail indispensable : analyser les causes qui ont inévitablement conduit à l'échec*. »
> Engels (*Révolution et contre-révolution en Allemagne*)

Réactiver une orientation et une politique communistes de type nouveau impose un tel examen car il présuppose une identification précise des obstructions intrinsèques (et pas seulement des obstacles extrinsèques) sur lesquelles cette Révolution a buté en sorte de pouvoir les surmonter (nous allons examiner ce que ce terme veut exactement dire) et ainsi nous réengager politiquement dans une longue marche politique d'émancipation communiste.

Formulons d'emblée la conclusion de cette étude : 200 ans après la révolution galoisienne de l'algèbre et par là de toutes les mathématiques, 50 ans après l'échec stratégique de la Révolution communiste chinoise, **le communisme marxiste a un besoin urgent d'une révolution galoisienne !**

Éclairage étymologique de l'unité des contraires *obstacle/obstruction*

Obstacle et obstruction *partagent* le même préfixe latin « ob » mais se distinguent par les verbes auxquels ce préfixe s'applique : *ob-stare* d'un côté, *ob-struere* de l'autre.

- ***Ob*** indique ce qui opère « devant » et « fait face » : le préfixe indique donc que quelque chose se présente *devant* ou se place *en travers*.
- ***Stare*** renvoie à l'activité de « se tenir » ⟹ *obstaculum* : l'obstacle est la chose qui se tient devant soi.
- ***Struere*** renvoie à l'activité de « construire » ⟹ *obstructio* : l'obstruction est la construction qui se trouve faire face.

D'où que l'obstacle se présente comme un objet sur lequel un parcours vient buter alors que l'obstruction est l'effet d'une construction structurale venant boucher la voie qu'elle a elle-même élaborée.

L'étymologie thématise donc la différence obstacle/obstruction sans thématiser pour autant l'intrication qui va nous importer entre obstacle d'apparence extrinsèque et obstruction de structure intrinsèque.

[1] Celle-ci détermine les invariants d'un espace topologique susceptibles de rendre compte des obstacles infranchissables rencontrés par telle ou telle opération sur cet espace :
https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9orie_de_l%27obstruction

Examinons comment la mathématique moderne vient éclairer cette dialectique [2] pour revenir ensuite sur les portées intellectuelles de cet éclairage mathématique.

ALGEBRE DES POLYNOMES

Commençons par un exemple mathématique plus aisément partageable : celui des équations polynomiales (qu'on dit « algébriques ») et des **groupes de Galois** venant obstruer leur résolution algébrique.

Les équations polynomiales

Une équation algébrique (c'est-à-dire polynomiale) formalise algébriquement (c'est-à-dire par opérations élémentaires sur sa composante inconnue x) une propriété individuelle de la grandeur quelconque x : ainsi l'équation du second degré x^2-x-6=0 formalise une grandeur x telle que, multipliée par elle-même [x.x=x^2], diminuée d'elle-même [-x] et de 6 [-6], elle devient nulle [=0].

Classiquement, on dit que « x » est *l'inconnue* de cette équation, considérant alors que l'équation a pour motivation principale la connaissance algébrique de la grandeur inconnue x ainsi algébriquement définie. Passer algébriquement de la définition à l'identification, faire ainsi passer x d'inconnue à connue, c'est ce qu'on appelle **résoudre** l'équation. Dans notre cas, il s'agit de la résoudre *algébriquement* c'est-à-dire d'exprimer x à partir des coefficients de l'équation [3] qui la définit selon des opérations arithmétiques (addition-soustraction et multiplication-division) et algébriques (extraction de racines de type √).

Toute équation du second degré ayant deux solutions (deux « racines ») et pas une seule - nous allons revenir longuement sur ce point décisif -, on peut résoudre algébriquement les deux solutions d'une telle équation :

$$x^2\text{-}x\text{-}6=0 \Longrightarrow x=-2 \text{ et } x=3$$

Plus généralement, l'équation générique du second degré $ax^2+bx+c=0$ aura deux racines :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

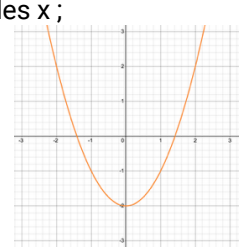
Remarques

Résolution algébrique

Point important : ayant une définition *algébrique* de l'inconnue x (par une équation polynomiale), on vise ici à son identification *algébrique* (qu'on dira « par radicaux » c'est-à-dire mobilisant éventuellement des racines « √ »).

On peut en effet envisager de résoudre une équation algébrique de différentes manières :

- **arithmétiquement** : par approximation numérique ;
  ainsi x^2-2=0 sera résolue par x=±1,414… (et non pas algébriquement par x=±√2)
- **graphiquement** : en traçant la courbe y=ƒ(x) associée à la fonction polynomiale ƒ et en examinant ses points d'intersection avec l'axe des x ;



[2] Le séminaire *mamuphi* y a consacré toute son année 2025-2026 : https://mamuphi.fr/2025-2026/

[3] Dans l'équation $ax^2+bx+c=0$:
- « x » est la **variable**,
- « a, b, c » sont les **coefficients**
- une grandeur « ρ » telle que $a\rho^2+b\rho+c=0$ est une **racine**.

- **trigonométriquement** : en identifiant les racines individuelles par des fonctions trigonométriques.

  Par exemple l'équation $x^5-1=0$ aura pour solutions :

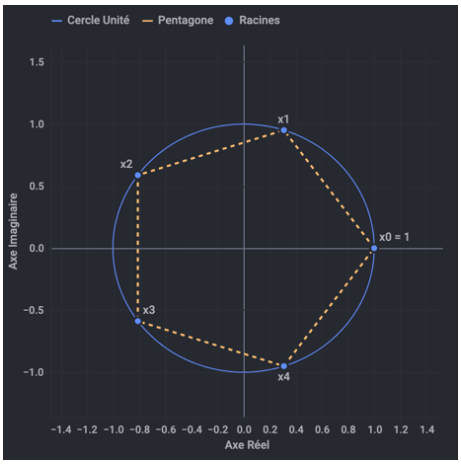
  - **algébriques** : 1 et les 4 solutions

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} \pm i\frac{\sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}}}{4}$$

  - **trigonométriques** : pour k={0, 1, 2, 3, 4} les 5 valeurs trigonométriques

$$x_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) + i.\sin(\frac{2k\pi}{5})$$

  - **graphiques** les 5 points suivants du plan complexe :



Le désir de résoudre algébriquement ce qui a été algébriquement défini relève d'un désir de **réduplication algébrique** : l'**énoncé** algébrique (l'équation polynomiale) doit autoriser une **énonciation** de même nature (énonciation algébrique, c'est-à-dire « par radicaux ») de son terme inconnu « x ».

On va voir que ce désir de réduplication algébrique vient précisément butersur un obstacle s'avérant insurmontable lorsque l'équation polynomiale atteint le degré 5 (équations qu'on dit « quintiques »).

Grandes étapes de la résolution des équations polynomiales

- Au début du IX° siècle (vers **825**), Al-Khwârizmî invente l'algèbre et résout par radicaux l'équation algébrique du second degré.
- Au **début du XVI°** (donc 7 siècles plus tard !), del Ferro puis Tartaglia résolvent par radicaux l'équation du troisième degré.
- Au **milieu du XVI°**, Ferrari résout par radicaux l'équation du quatrième degré.
- En **1828** (donc près de 3 siècles plus tard), Abel démontre que l'équation générale du cinquième degré est irrésoluble.
- En **1830**, Galois dégage les raisons structurales de cet obstacle infranchissable : l'existence inapparente d'un groupe de substitution (appelé groupe de Galois) venant faire obstruction.

Résolution sur les grandeurs complexes

Notons que la résolution d'une équation algébrique élémentaire (de degré 2) ne peut en général se faire que sur les grandeurs complexes (mettant en jeu la grandeur imaginaire « **i** » définie par l'équation polynomiale $i^2+1=0$) et non pas sur les seuls nombres réels.

Ainsi

- l'équation $x^2-4=0$ peut se résoudre sur les nombres **entiers** : $x=\pm2$;
- l'équation $x^2-2=0$ peut se résoudre sur les nombres **réels** (ici *algébriques*) : $x=\pm\sqrt{2}$;
- l'équation $x^2+1=0$ ne peut se résoudre que sur les grandeurs **complexes** (ici *imaginaires*) :

  $x=\pm i=\pm\sqrt{(-1)}$.

Nombre de solutions

Le « **théorème général de l'algèbre** » démontre qu'une équation polynomiale de degré *n* a toujours *n* racines.

Attardons-nous un instant sur ce point tout à fait décisif pour comprendre pourquoi les équations quintiques vont en général s'avérer algébriquement irrésolubles.

L'équation polynomiale porte sur une grandeur inconnue x mais la propriété individuelle qu'elle lui attribue (et qui donc la caractérise) se trouve ipso facto partagée par *n-1* autres !

> Ainsi $x^2-4=0$, définissant le nombre 2 [puisque $2^2-4=0$], définit tout aussi bien le nombre négatif -2 [puisque $(-2)^2-4=0$].

L'équation polynomiale $P_n(x)=0$ de degré *n* vient ainsi **grouper** *n* grandeurs (ses *n* « racines ») partageant la même propriété individuelle formalisée par l'équation.

Or – point décisif - ce groupement n'est pas présenté comme tel par l'équation individuelle en x !

Mieux : ce groupement inapparent, sous-jacent à l'équation, vient constituer une sorte d'**inconscient algébrique** de l'équation polynomiale ; ainsi, en profilant une grandeur individuelle inconnue x, l'équation groupe sans le savoir cette grandeur individuelle avec d'autres grandeurs semblables en sorte que l'équation ne sait pas – ne peut directement savoir - comment elle groupe souterrainement ses n racines.

Plus précisément, sur ses propres forces (c'est-à-dire à partir de ses seuls coefficients), l'équation peut contrôler ce groupement algébrique seulement jusqu'au degré 4 puisque, comme on va le voir, résoudre algébriquement (« par radicaux ») une équation algébrique, c'est précisément décomposer son groupement en une simple juxtaposition, en une mise côte-à-côte de ses 4 racines.

Ainsi le polynôme précédemment examiné x^5-1 peut se décomposer en $(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$; et le second polynôme $(x^4+x^3+x^2+x+1)$, étant lui-même résoluble, pourra se décomposer ainsi :

$$(\mathbf{x}-\frac{-1+\sqrt{5}}{4}-i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4})(\mathbf{x}-\frac{-1+\sqrt{5}}{4}+i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4})(\mathbf{x}-\frac{-1-\sqrt{5}}{4}-i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4})(\mathbf{x}-\frac{-1-\sqrt{5}}{4}+i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4})$$

Solidarité des racines

Pour la résolution d'une équation quintique, le point décisif, que Galois va mettre au jour au début du XIX°, va être le suivant : en groupant de fait (et sans le savoir) ses 5 racines, l'équation quintique *générale* [4] les **solidarise** de manière indéfectible.

En effet, la résolution algébrique de l'équation consiste en une **désolidarisation** de ses racines, et la capacité à **désolidariser les racines** pour les identifier algébriquement une à une va dépendre d'une capacité algébrique à **décomposer leur groupe** de solidarité en sous-groupes, et ultimement en groupe singleton (composé d'une seule racine).

Autrement dit, résoudre par radicaux une équation polynomiale revient à un travail de police algébrique exigeant d'un groupe clandestin que chacun de ses membres exhibe ses papiers d'identité !

Illustration de la solidarité entre racines d'une même équation polynomiale

Équation quadratique

Si l'équation $x^2+ax+b=0$ a deux solutions α et β, alors $x^2+ax+b=(x-\alpha).(x-\beta)=x^2-(\alpha+\beta)+\alpha.\beta$

Il en découle que α et β sont solidarisés par les coefficients a et b de l'équation selon les relations suivantes : $\alpha+\beta=-a$ et $\alpha.\beta=b$.

Équation quintique

Pour l'équation $x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ aux 5 solutions α, β, γ, δ, ε on aura de même :

$$x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=(x-a).(x-\beta).(x-\gamma).(x-\delta).(x-\varepsilon)$$

D'où on déduit entre autres $(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)=-a$ et $[\alpha.\beta.\gamma.\delta.\varepsilon]=-e$.

[4] Bien sûr, certaines équations quintiques particulières restent résolubles :
par exemple $x^5-5x^3+4x=x(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)=0$ a les 5 solutions suivantes : {-2, -1, 0, +1, +2}.

Dans tous les cas, les racines sont ainsi solidairement regroupées via les coefficients de l'équation qui définit leur propriété individuelle partagée.
Mais, dans le cas général, ces relations coefficients-racines ne suffisent pas à identifier individuellement chaque racine à partir de ces coefficients partagés.

L'équation quintique

Rappel

Donnons à l'équation quintique générale la forme suivante :

$$P(x)=x^5+a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x+a_5=\sum_i a_i x^i$$

On sait qu'elle possède cinq racines que l'on notera ρ_j : $\{\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5\}$.

Comme par définition chaque racine vérifie $P(\rho_j)=0$, on peut réécrire ainsi $P(x)$:

$$P(x)=(x-\rho_1).(x-\rho_2).(x-\rho_3).(x-\rho_4).(x-\rho_5)=\prod_j(x-\rho_j)$$

On obtient ainsi deux présentations de la même équation :

- l'une selon la propriété de chaque grandeur individuelle : $\sum_i a_i x^i=0$;
- l'autre selon le groupement des 5 racines, solutions de l'équation : $\prod_j(x-\rho_j)=0$

On a bien sûr une concordance des deux écritures, soit : $\sum_i a_i x^i=\prod_j(x-\rho_j)$

Pour autant, les 5 racines ρ_i n'apparaissent pas comme telles dans l'équation de départ $P(x)= \sum_i a_i x^i=0$.

Début du XIX°

Au début du XIX°, cela fait déjà 250 ans que les mathématiciens butent sur la résolution par radicaux de l'équation quintique.

Un climat de découragement se répand parmi eux : **à quoi bon** l'algèbre si pour d'obscures raisons son objet constituant (l'équation polynomiale) s'avère algébriquement irrésoluble ? **À quoi bon** une algèbre énonçant les propriétés distinctives d'une grandeur si au bout du compte l'algèbre ne peut connaître sur ses propres forces l'objet qu'elle a caractérisé ? **En vain** l'algèbre si celle-ci doit remettre à d'autres domaines mathématiques (l'arithmétique, la trigonométrie, la géométrie…) le soin d'approcher les objets qu'elle définit ! **En vain** l'algèbre si son objet propre – l'équation algébrique – s'avère n'être pas algébriquement résoluble et donc si l'algèbre ne sait pas elle-même répondre aux questions qu'elle pose !

> Indiquons tout de suite un point crucial : comme souvent, l'obstacle **objectif** (le mur de l'irrésolubilité) se réduplique en un obstacle **subjectif** (que Bachelard nomme « *obstacle épistémologique* » - nous y reviendrons) car tout dépend ici de la manière dont on interroge algébriquement l'équation algébrique c'est-à-dire dont on problématise la question qu'on lui adresse et par là la réponse qu'on attend d'elle : s'agit-il de la résoudre **individuellement** (c'est-à-dire « par radicaux ») ou **collectivement** (c'est-à-dire par « groupe de Galois ») ?

Toujours est-il qu'un certain nombre de mathématiciens, parmi les plus grands de l'époque [5], en viennent au diagnostic désabusé d'une **saturation** de l'algèbre, voire d'un **épuisement** des mathématiques.

Diagnostics de saturation mathématique et d'épuisement mathématicien

- En mai **1680**, **Leibniz** écrivait au père de La Chaise : « *Maintenant, je crois qu'on peut dire que la mathématique pure est enfin achevée, savoir celle qui contient les nombres, les figures et les mouvements ; le reste ne sera qu'un exercice de jeunes gens pour se former au raisonnement. Mais la postérité n'aura qu'à tourner ses pensées sérieuses vers la physique. Et peut-être pourrions-nous aller fort loin de notre temps même pour la médecine, si on s'y prenait mieux.* »
- En **1748**, **Buffon et Diderot** répétaient à l'envi que « *le règne des mathématiques est fini* ».

[5] Remarquons cependant que le plus grand d'entre eux – Gauss – y échappe !

- Le 21 septembre **1781, Lagrange** écrivait à d'Alembert : « *Je commence à sentir que ma force d'inertie augmente peu à peu, et je ne réponds pas que je fasse encore de la Géométrie dans dix ans d'ici. Il me semble aussi que la mine est presque déjà trop profonde, et qu'à moins qu'on ne découvre de nouveaux filons, il faudra tôt ou tard l'abandonner. La physique et la chimie offrent maintenant des richesses plus brillantes et d'une exploitation plus facile ; aussi le goût du siècle paraît-il entièrement tourné de ce côté-là, et il n'est pas impossible que les places de la Géométrie dans les Académies ne deviennent un jour ce que sont actuellement les chaires d'arabe dans les Universités*. »
- Le 14 novembre **1811, Cauchy**, dans un discours à Cherbourg *Sur les limites des connaissances humaines*, prononçait ces mots : « *On est tenté de croire que les connaissances de l'homme peuvent croître et se multiplier à l'infini. […] Cependant si l'on observe que toute notre intelligence et nos moyens sont renfermés entre des limites qu'ils ne peuvent jamais franchir, on se persuadera sans peine que nos connaissances sont bornées comme nos facultés. […] Que dirais-je des sciences exactes : la plupart paraissent parvenues à leur plus haute période. L'arithmétique, la géométrie, l'algèbre, les mathématiques transcendantes sont des sciences que l'on peut regarder comme terminées, et dont il ne reste plus à faire que d'utiles applications*. »

Un carrefour subjectif

Dans les premières décennies du XIX°, la situation est donc la suivante : l'algèbre, un millénaire après son invention, se trouve stationner dans ce qui s'apparente à une impasse. Quelles voies les mathématiciens de l'époque vont-ils subjectivement adopter ?

Deux diagnostics objectifs s'opposent, qui conduisent chacun à deux possibilités subjectives différentes :

I. Un premier diagnostic de **saturation globale** ouvre à deux possibilités :
- **Abandonner les mathématiques** (la stérilisation de l'algèbre affectant toutes les mathématiques puisque l'algèbre avait su surmonter la schizophrénie grecque entre arithmétique et géométrie [6]) et se tourner désormais vers la physique ou de la médecine.
- **Abandonner l'algèbre** (considérée comme saturée) pour se déplacer vers d'autres domaines mathématiques restant fertiles (ce sera la voie finalement adoptée par Cauchy se tournant vers l'analyse, avec les succès que l'on sait [7]).

II. Un second diagnostic de **blocage circonstancié** ouvre à deux nouvelles possibilités :
- **Examiner la stagnation** : relève-t-elle d'une incapacité temporaire (ce qui préserve alors l'espoir d'un jour y arriver) ou d'une impossibilité réelle, rationnellement explicable et donc définitive ? C'est l'examen auquel se livre Abel et qui le conduit en 1828 à trancher : l'équation quintique générale est irrésoluble.
- **Examiner l'obstacle manifeste** en dégageant ses raisons souterraines : l'objet sous-jacent, algébriquement inconscient, qui vient mesurer l'obstruction à la résolution algébrique. C'est ce que Galois entreprend en 1830.

Le diagnostic de saturation

Faute de désaturation possible (ici d'aération renouvelant l'air de l'algèbre et la rendant à nouveau respirable), le premier diagnostic conduit à l'abandon du domaine jusque-là travaillé pour tenter ailleurs de faire fortune. Avec alors deux possibilités : quitter les mathématiques (voie déclarée par Cauchy en 1811) ou simplement quitter l'algèbre (voie ultérieure effectivement pratiquée par Cauchy).

La menace subjective des différents nihilismes plane sur cette orientation : « *À quoi bon continuer ? En vain ce projet !* », prenant ainsi appui sur une **fatigue** subjective des mathématiciens pour la thématiser comme étant en fait un **épuisement**, légitimé par un épuisement objectif de la ressource travaillée. [8]

---

[6] Voir mes exposés sur l'émergence de l'algèbre : https://fnicolas1947.fr/intellectualites/#flipbook-df_3192/1/

[7] Cauchy va fonder l'analyse *moderne* par abandon des **infinitésimaux** (au principe de l'analyse *classique*) et déplacement vers la notion de **limite**.

[8] Certains d'entre nous ont connu en politique cette voie de la saturation (au demeurant saturation volontaire plus que simplement constatée), de l'épuisement (ici pratiqué plutôt que subi) : la voie liquidatrice de Lazarus,

Deleuze : *L'épuisé* (1992)

L'épuisé, c'est beaucoup plus que le fatigué. Le fatigué a épuisé la réalisation, tandis que l'épuisé épuise tout le possible. Le fatigué ne peut plus réaliser, mais l'épuisé ne peut plus possibiliser.

Le possible ne se réalise que dans la fatigue : on est fatigué de quelque chose. Mais on est épuisé de rien : dans l'épuisement, on s'active mais à rien.

L'épuisé, c'est l'exhaustif, le tari, l'exténué et le dissipé. La combinatoire est l'art ou la science d'épuiser le possible.

Il y a quatre façons d'épuiser le possible :

- *fermer des séries exhaustives de choses,*
- *tarir les flux de voix,*
- *exténuer les potentialités de l'espace,*
- *dissiper la puissance de l'image.*

Le diagnostic de l'obstacle

Cet autre diagnostic ne baisse pas les bras et s'attaque à l'obstacle pour comprendre ses raisons d'être.

D'abord l'obstacle peut-il être levé : franchi (par le haut ou par le bas, par les côtés) ou supprimé (dissous ou explosé [9]) ? Et s'il ne peut l'être, qu'est-ce alors qui rend compte de son existence ? Sont-ces des causes externes (fortuites, contingentes, accidentelles) laissant ainsi l'espoir qu'elles se dispersent ultérieurement ou sont-ce plutôt des causes internes (ce qui oriente alors la recherche vers une problématique de l'obstruction) ?

Dans le cas de l'algèbre, Abel a démontré que cet obstacle ne pouvait être levé : l'irrésolubilité de l'équation quintique générale constitue son **point de réel**. Galois est ensuite venu démontrer que cette irrésolubilité de surface (celle de l'équation individuelle en x) découlait d'une impossibilité souterraine (faisant obstruction) : celle de décomposer son groupe de substitution (qui traduit algébriquement la solidarité collective des racines).

Au total, si l'obstacle ne pouvait être levé, l'obstruction pouvait être relevée c'est-à-dire non pas supprimée mais rationnellement assumée.

Obstacle épistémologique !

Mais encore fallait-il pour cela lever un obstacle d'un autre type que Gaston Bachelard appelle « *obstacle épistémologique* » [10] : l'obstacle épistémologique n'est tant un obstacle mathématique et objectif qu'un obstacle mathématicien et subjectif.

« L'obstacle épistémologique » chez Gaston Bachelard
(*Formation de l'esprit scientifique*)

- *Quand on cherche les conditions psychologiques des progrès de la science, on arrive bientôt à cette conviction que c'est en termes d'obstacles qu'il faut poser le problème de la connaissance scientifique. Et il ne s'agit pas de considérer des obstacles externes, comme la complexité et la fugacité des phénomènes, ni d'incriminer la faiblesse des sens et de l'esprit humain : c'est dans l'acte même de connaître, intimement, qu'apparaissent, par une sorte de nécessité fonctionnelle, des lenteurs et des troubles. C'est là que nous montrerons des causes de stagnation et même de régression, c'est là que nous décèlerons des causses d'inertie.*

---

délibérément théorisée dans son *Anthropologie du nom*.

[9] Yukong ne s'est-il pas attaqué à déplacer une montagne ? Voir le texte de Mao de 1945 : https://materialisme-dialectique.com/mao-zedong-comment-yukong-deplaca-les-montagnes/

[10] Cf. l'exposé *mamuphi* du 9 mai 2026 de Jean-Jacques Szczeciniarz : *Obstacles épistémologiques et obstructions* https://youtu.be/Kw8spkrznyw

- *Une connaissance scientifique acquise par un effort scientifique peut elle-même décliner. La question abstraite et franche s'use : la réponse concrète reste. Un obstacle épistémologique s'incruste sur la connaissance non questionnée. Des habitudes intellectuelles qui furent utiles et saines peuvent, à la longue, entraver la recherche. L'idée gagne ainsi une clarté intrinsèque abusive. À l'usage les idées se valorisent indûment. Une valeur en soi s'oppose à la circulation des valeurs. C'est un facteur d'inertie pour l'esprit. L'instinct formatif finit par céder devant l'instinct conservatif.*

Dans notre cas, la voie galoisienne présuppose d'abandonner l'idée qu'une équation algébrique aurait pour raison sa résolution individuelle par radicaux. À partir de Galois, résoudre une telle équation va signifier tout autre chose : ce sera dégager son groupe de substitution (son groupe de Galois) c'est-à-dire la manière algébrique dont l'équation solidarise ses racines. Ce faisant, l'algèbre révolutionne sa motivation : non plus l'identification individuelle (par carte d'identité algébrique de chaque racine séparément) mais la compréhension de la solidarité collective venant grouper toutes ses racines.

Olivier Debarre [11]

« *Ce n'est que beaucoup plus tard que le monde mathématique a commencé à réaliser que la théorie de Galois allait bien au-delà du problème, somme toute* ***très artificiel****, de la résolution par radicaux des équations algébriques. Galois avait en fait propulsé tout le domaine de l'algèbre dans un nouveau monde : celui des groupes, des extensions de corps, et de bien d'autres concepts fondamentaux des mathématiques d'aujourd'hui.*

*En particulier, de nos jours on s'est rendu compte qu'****il est bien plus important*** *de savoir calculer le groupe de Galois d'un polynôme, plutôt que de savoir s'il est résoluble par radicaux.* » [12]

Technique des groupes de Galois

Ne nous engageons pas ici dans la technique mathématique des Groupes de Galois : elle est délicate et subtile (le groupe de Galois d'une équation polynomiale donnée ne peut aucunement se lire dans la formule de l'équation). [13]

Exemple 1

De ces deux équations très proches,

$$x^5+\mathbf{6}x^3+5x-1=0 \quad \text{et} \quad x^5+\mathbf{5}x^3+5x-1=0$$

l'une est résoluble, l'autre ne l'est pas :

- l'une a les cinq racines x_k (k=0,1,2,3,4) suivantes :

$$x_k = \zeta^k \sqrt[5]{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} - \zeta^{-k} \sqrt[5]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \; avec \; \zeta = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + i\,\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

- pour l'autre, son groupe de Galois renvoie au groupe symétrique S_5 contenant le groupe alterné A_5 lequel est indécomposable.

Impossible de discerner l'une de l'autre à simple lecture. [14]

Exemple 2

1) Soit l'équation $x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$.

---

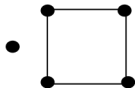
[11] https://fr.wikipedia.org/wiki/Olivier_Debarre

[12] https://youtu.be/VBauUSg5Hs0

[13] Et d'ailleurs, à ma connaissance, il n'existe toujours pas de calcul automatisé du groupe de Galois d'une équation donnée.

[14] Pour information, c'est la première équation (celle avec $\mathbf{6}x^3$) qui est irrésoluble.

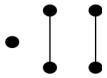
- Sur le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels, l'équation est irrésoluble par radicaux en sorte que son groupe de Galois se décompose en 1+4 – ce que l'on peut figurer ainsi :



- Sur l'extension $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ [15], l'équation peut se factoriser ainsi :

$$(x-1)(x^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}x+1)(x^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+1)$$

en sorte que son groupe de Galois devient décomposable en 1+2+2 selon la figure suivante :

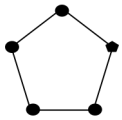


- Sur l'extension $\mathbb{Q}[\sqrt{5}, i]$, l'équation devient entièrement résoluble par radicaux :

$$(\mathbf{x}-1)(\mathbf{x}-\frac{-1+\sqrt{5}}{4}-i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4})(\mathbf{x}-\frac{-1+\sqrt{5}}{4}+-i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4})(\mathbf{x}-\frac{-1-\sqrt{5}}{4}-i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4})(\mathbf{x}-\frac{-1-\sqrt{5}}{4}+i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4})$$

en sorte que son groupe de Galois est décomposable en 5 groupes singletons : 1+1+1+1+1 :

2) Soit par contre, l'équation $x^5+6x^3+5x-1=0$. On a vu qu'elle était irrésoluble car son groupe de Galois renvoyait au groupe symétrique S_5 contenant le groupe alterné A_5 lequel est indécomposable :



Sans nous étendre plus avant sur l'algèbre du nouvel objet « groupe de Galois », retenons que sa mise au jour, en tout point analogue à la mise au jour par Freud de l'inconscient psychanalytique, autorise une révolution proprement moderne de l'algèbre.

Portée mathématique de la révolution galoisienne

Le geste de Galois, refocalisant l'algèbre sur la structure des groupes, a eu une immense portée dans tous les domaines mathématiques.

- **Algébre** : les groupes deviennent des objets structurels, étudiables en eux-mêmes indépendamment de la nature propre de leurs éléments. Ainsi, la correspondance de Galois, venant apparier emboitements de **groupes** à extensions de **corps** via l'**anneau** des polynômes, intrique trois structures algébriques en un espace mathématique de type nouveau. De même, son opération d'adjonction-extension ouvre la voie à d'autres révolutions mathématiques du même type.
- **Géométrie** et **topologie** : les différents espaces géométriques et topologiques deviennent caractérisables par les **invariants** d'un **groupe** de transformations, c'est-à-dire par ce que ces transformations précisément ne transforment pas. D'où en géométrie le **programme d'Erlangen** engagé par Félix Klein en 1872 et en topologie le **groupe fondamental** des lacets proposé par Poincaré.
- **Analyse** : dans les années 1870, Sophus Lie étend les idées de Galois aux équations différentielles (leurs résolutions *par quadratures* prenant le relais de la résolution algébrique *par radicaux* des équations algébriques), introduisant ainsi des groupes continus (et non plus discrets) : les *groupes de Lie* se substituent aux *groupes de Galois*.
- **Arithmétique** : la problématique galoisienne de l'extension de corps aura d'importantes répercussions sur l'arithmétique des nombres premiers : groupes de décomposition, théorie des corps de classes, etc., tout ceci conduisant ultimement au programme de Langlands (1967).

[15] $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ désigne le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels étendu par adjonction de $\sqrt{5}$.

Autant dire qu'il n'y a pas un domaine des mathématiques qui n'ait été atteint par la révolution galoisienne dont on peut finalement constater qu'elle a **étendu** les mathématiques classiques en mathématiques modernes en leur **adjoignant** la structure de groupe.

OBSTRUCTIONS MATHEMATIQUES PLUS GENERALES

Caractéristiques

Le schème qu'on vient de détailler s'avère mathématiquement général.

L'idée princeps sera la suivante : lorsqu'une opération sur tel ou tel objet d'un domaine donné s'avère buter sur une impossibilité, considérer d'abord que l'obstacle consciemment apparu **émerge** d'une structure sous-jacente et inconsciente telle la pointe d'un iceberg ; puis identifier la dimension de cette structure qui agit l'obstruction en sorte d'en prendre mesure objective ; enfin relever l'obstruction en adjoignant cet objet de type nouveau au domaine de départ.

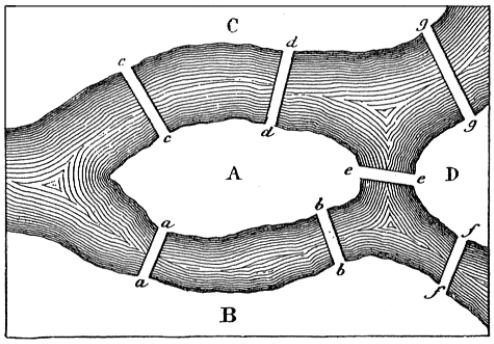
Ce faisant, une telle relève mobilise les traits suivants :

- Il en va de la **structure globale** du domaine d'intervention.
- Il en va d'une dimension **inapparente** de cette structure.
- Il s'agit d'identifier un **invariant** de cette structure, rendant compte de sa puissance d'obstruction et d'en prendre mesure en l'objectivant.
- Relever cette obstruction, c'est alors avouer son **secret** [16] en adjoignant l'objet de type nouveau en sorte d'étendre le domaine d'étude considéré.
- Au total, révolutionner la manière d'opérer dans le domaine en question (et non pas l'abandonner) en **révolutionnant la subjectivation** mobilisatrice.

Autres exemples

Donnons rapidement trois autres exemples mathématiques d'obstructions et de leur relève par la même mesure objective : la ***caractéristique d'Euler*** notée χ.

Les ponts de Königsberg



Les ponts de Kœnigsberg en 1759.

Un problème classique [17] : existe-t-il un chemin permettant de revenir à son point de départ en empruntant une seule fois chacun des sept ponts de la ville de Kœnigsberg ?

Euler démontre en 1735 qu'un tel chemin (dit ensuite « eulérien ») est **impossible** car il eut fallu pour cela un nombre pair de ponts.

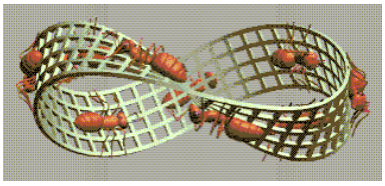
---

[16] Sans oublier pour autant que « *un secret avoué reste un secret* » (Lacan).

[17] https://fr.wikipedia.org/wiki/Probl%C3%A8me_des_sept_ponts_de_K%C3%B6nigsberg

La généralisation de ce problème de graphe a débouché sur de nouveaux objets, venant mesurer l'obstruction à parcourir de tels chemins eulériens : **la caractéristique d'Euler** [18] (mesurant la forme globale d'un espace géométrique ou topologique [19]) et **les nombres de Betti** [20] (mesurant la connectivité d'un espace topologique).

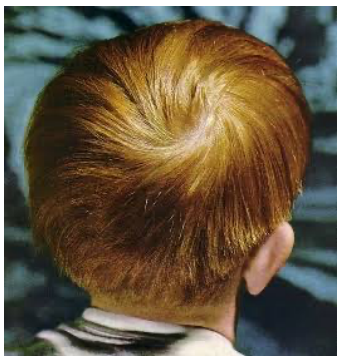
Bande de Möbius



Comme toute bande, celle de Möbius [21] possède *localement* deux côtés. Mais sa structure *globale* (en torsion) la rend **unilatère** (d'un seul côté). D'où l'impossibilité de l'orienter.

Cet obstacle émerge d'un invariant homotopique de la bande que l'on peut mesurer par la caractéristique d'Euler-Poincaré χ.

Champ de vecteurs sur une sphère



Soit un champ continu de vecteurs tangents sur la sphère. Peut-on le rendre continu ?

La réponse est non. C'est le contenu du « *théorème de la boule chevelue* » [22] : on ne peut peigner une sphère sans créer une singularité (un épi, un trou…).

L'obstruction est à nouveau mesurée par la caractéristique d'Euler : pour que le champ soit continu, il faudrait que cette caractéristique soit nulle alors qu'elle vaut 2 pour la sphère.

Dans ces trois situations, une opération (*cheminer*, *orienter*, *peigner*) s'avère impossible en raison d'une caractéristique globale inapparente faisant obstruction dans la situation, caractéristique qu'il est cependant possible de mesurer avec la caractéristique d'Euler, en sorte que l'étude de cette même opération dans une nouvelle situation se concentrera désormais sur l'examen de sa caractéristique d'Euler.

Liste d'obstructions (dont trois ne sont pas encore relevées)

Yves André, dans un récent exposé au séminaire *mamuphi* [23], a fourni une liste détaillée de telles obstructions et, si possible, de leurs relèves.

---

[18] https://fr.wikipedia.org/wiki/Caract%C3%A9ristique_d%27Euler

[19] Dans le cas d'un polyèdre, il s'agit d'un simple nombre entier χ=S-A+F (où S est le nombre de sommets, A le nombre d'arêtes et F le nombre de faces). Il va de soi que regarder un polyèdre ne permet aucunement de pressentir que χ vaut 2 pour une sphère et 0 pour un tore !

[20] https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_de_Betti

[21] https://fr.wikipedia.org/wiki/Ruban_de_M%C3%B6bius

[22] https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_la_boule_chevelue

23 Voir son exposé *mamuphi* du 14 mars 2026 : *Des obstacles aux obstructions, selon la grande tradition*

Dans le tableau récapitulatif qui suit, trois obstructions non encore relevées sont indiquées par un fond gris.

On mesure la diversité des opérations concernées par de telles rencontres : ici aussi, la mathématique est un encouragement à ne pas tourner les talons devant un mur inopinément apparu !

	Obstacle à une opération	**Obstruction**
Euler (1736)	circuler	Caractéristique d'Euler et nombres de Betti
Galois (1830)	résoudre	Groupe de Galois
Cousin (1895)	construire [24]	Théorie homologique des variétés analytiques
Dehn (1900)	découper	Obstruction de Dehn
Dehn (1910)	dénouer [25]	histoire toujours ouverte…
Brouwer (1912)	peigner	Théorème de la boule chevelue
Hilbert (1928)	décider	quasi-incalculabilité [26]
Leray (1945)	passer [27]	Conditions de recollement Théorie des faisceaux et algèbre homologique
Eilenberg-Cartan (1950…)	assembler/scinder	Théorie des groupes-extensions
Novikov (1955)	réduire [28]	indécidabilité !
Kodaira-Spencer (1960)	déformer	Déploiement des singularités

Portees intellectuelles

Praxis et poièsis

Étudier les mathématiques, comme nous le faisons ici, a un intérêt en soi : comme tout travail émancipateur [29], son intérêt subjectif réside d'abord en lui-même.

> En effet, un tel exercice physique et intellectuel engendre sa propre satisfaction – c'est en cela que, comme tout travail émancipateur, il est essentiellement **gratuit** puisqu'il se rémunère lui-même.

Mais un tel travail est également producteur de résultats détachables, devenant ainsi partageables avec quiconque. C'est là sa dimension objective au sens où ce travail produit des objets devenant appropriables par d'autres.

---

mathématique - https://youtu.be/AFPWSxMLg6Q ; https://mamuphi.fr/wp-content/uploads/2026/03/Andre.pdf

[24] Il s'agit de construire des fonctions localement prescrites

[25] Il s'agit de dénouer les nœuds ou décider s'ils sont semblables

[26] des circuits hamiltoniens (par sommets) mais pas des circuits eulériens (par arêtes)

[27] Il s'agit de passer du local au global

[28] Il s'agit de réduire des mots

[29] Un travail émancipateur, c'est un travailleur polyvalent travaillant une matière complexe pour produire des choses socialement utiles.

Où l'on retrouve la dialectique grecque de la *praxis* (subjectivante) et de la *poièsis* (objectivante).

Portées extra-mathématiques

Carrefours

La mathématique nous invite à réexaminer chaque situation dans laquelle une pratique, une opération, un projet viennent buter fortuitement sur un obstacle imprévu convoquant la conscience agissante à un carrefour :

1) **abandonner** le projet (c'est la voie nihiliste de la « désillusion » [30]) : le lieu est **désubjectivé** ;
2) **faire demi-tour**, changer son fusil d'épaule [31] : le lieu est considéré comme **stérile** ;
3) **lever l'obstacle** (en le détruisant ou en le franchissant) : le lieu est **bouché** ;
4) **dégager l'obstruction** secrète pour la relever : le lieu s'avère **opaque**.

Amour

Quel amant ou amante ne connaît ce genre de carrefour subjectif lorsque le couple amoureux se trouve buter sur un mur inattendu qui tend à l'éparpiller ?

Musique

En musique, n'en est-il pas de même aujourd'hui pour le compositeur dont la fidélité à la musique classique s'est **étendue**, par **adjonction** de la musique moderne (atonale, amétrique et athématique), à une musique contemporaine classique : abandonner la composition, se retirer ailleurs (dans l'improvisation ?), lever l'obstacle (mais lequel ?) ou relever l'obstruction (mais laquelle exactement) ? [32]

Portées politiques

Mais ce qui nous importe ici au premier chef, ce sont les r***ai***sonances [33] de cette notion pour notre intellectualité politique de communistes.

Mentionnons à ce titre le chantier, ouvert par le testament de Mao [34], sur la notion marxiste de « **dictature du prolétariat** » : le fait même qu'en 1975 Mao énonce une question sans y répondre pointe le fait que cette notion fait obstacle à la Révolution culturelle et donc à la Révolution communiste engagée en 1958.

En vérité, cet obstacle est triple ; il concerne :

a) l'acteur ***prolétariat*** ;
b) l'opération de **dictature** ;
c) leur intrication sous forme d'un génitif subjectif : l'opération de *dictature* **exercée par l'acteur** *prolétariat*.

Le lieu n'est pas ici de traiter tout ceci en détail.

Contentons-nous d'indiquer les principales nervures du chantier.

a) La notion marxiste de **prolétariat** est écartelée entre deux déterminations, incompatibles entre elles : d'un côté le prolétariat comme **classe politique générique** apte à diriger une extension communiste du socialisme [35] ; de l'autre le prolétariat comme **classe sociale spécifiée** des prolétaires

---

[30] Abandonner ses rêves (en les qualifiant alors de *puérils*) pour apprendre à *survivre* (activement, passivement ou de façon neutre) dans les impasses d'un « *il n'y a pas d'alternative* », d'un « *il n'y a que ce qu'il y a* ».

[31] En général, un tel changement se fait de gauche à droite, et le plus souvent de l'ultra-gauche à la droite extrême…

[32] La nouvelle saison 2026-2027 du séminaire *mamuphi* va s'emparer de cette question.

[33] les résonances horizontales et les retentissements verticaux

[34] Voir dans le livre Alessandro Russo sur la Révolution culturelle son chapitre 9 : *Conditions intellectuelles d'une évaluation politique*

[35] Voir la Révolution communiste chinoise (1958-1976) comme extension communiste du socialisme par adjonction de Communes populaires (à partir de 1958) et de mouvements communistes de masse (à partir de 1966).

(entendus négativement comme ceux qui ne possèdent rien d'autre que leurs corps). D'un côté une généricité, de l'autre une constructibilité (qui plus est basée sur une négativité : n'avoir que des bras…) !

N'entrons pas ici dans les détails pratiques de cette notion durant la Révolution communiste chinoise (1958-1976) mais indiquons seulement qu'ils convergent vers cette question (faisant écho à celle que l'on posait alors à Mao « *Mais, dans la Chine socialiste, où est la bourgeoisie ?* » - ce à quoi Mao répondait : « *dans la Chine socialiste, la bourgeoisie est dans le Parti communiste !* ») : « *mais alors,* ***dans la Chine socialiste, où exactement est le prolétariat ?*** » - et l'on sait qu'en 1975 Mao n'avait pas/plus de réponse.

b) La notion marxiste de **dictature** est théoriquement ancrée dans celle d'État : à dictature bourgeoise par un État capitaliste, dictature prolétarienne par un État socialiste. Mais ce chevillage à l'État, opérant pour la révolution socialiste (de type *destruction-reconstruction*) est venu buter sur une Révolution communiste relevant plutôt du type *adjonction* (des Communes populaires et des mouvements communistes de masse) et *extension* (communiste du socialisme).

L'idée princeps serait ici de reconsidérer ce qui s'avançait sous la notion de dictature en le repensant à la lumière du concept mathématique de **forcing** [36] : la révolution communiste « force » politiquement une émancipation de l'Humanité qui ne lui est nullement naturelle mais qui, tout au contraire, la divise antagoniquement.

c) La Révolution communiste chinoise n'a manifestement pas validé l'idée marxiste-léniniste que le prolétariat restait, dans le socialisme, l'opérateur effectif d'une dictature politique exercée sur la bourgeoisie : qu'en a-t-il été du prolétariat lors de la séquence Communes populaires (1858-1962) de la Révolution communiste ? Pas grand-chose, si ce n'est la défense des privilèges accordés aux ouvriers des *danwei* (usines d'État). Et pourquoi Mao a-t-il dû, à l'été 1966, recourir pour lancer la Révolution culturelle au mouvement de la jeunesse plutôt qu'au prolétariat des villes ? Au total, qu'en a-t-il été d'une position d'avant-garde du prolétariat tout au long de cette Révolution si l'on exclut l'unique brève séquence début 1967 de la Commune de Shanghaï ? Autant d'énigmes et d'obstacles qu'il nous revient d'examiner de près.

Rendu en ce point, on retrouve nos quatre options précédentes :

1) **abandonner** tout projet politique émancipateur : cela a été la voie des renégats, « nouveaux philosophes » en tête ;
2) **faire demi-tour** (au nom d'une saturation interne tenue pour indépassable) : cela a été la voie liquidatrice de Sylvain Lazarus ;
3) **lever l'obstacle** (en le détruisant ou en le franchissant) : quelle en serait ici la signification politique exacte ?
4) dégager l'obstruction secrète pour la **relever** : c'est la voie qui semble la plus prometteuse - mais encore faudrait-il pour cela arriver à mesurer précisément l'invariant secret de la structure politique qui vient obstruer la révolution communiste dans le socialisme.

   Les réactionnaires ne manquent ici d'offrir leur solution : l'obstruction à la révolution communiste tiendrait… à « la nature humaine » - les communistes chinois ont été confrontés à cette problématique et y ont largement répondu. [37] Mais si l'obstruction n'est pas là, où est l'obstruction politique ?

Révolution galoisienne de la politique communiste !

On l'a compris : le chantier est grand ouvert.

S'il s'agit bien là d'obstructions essentielles et intrinsèques, non de simples obstacles circonstanciels susceptibles d'être levés, l'horizon ne peut alors être que celui d'une révolution galoisienne (revue par le forcing de Paul Cohen) en matière de politique communiste.

C'est bien à une telle révolution que, sur ses propres forces, cette revue voudrait contribuer.

●●●

[36] Voir la prochaine école *mamuphi* sur le forcing, annoncée en fin de ce même numéro.
[37] Voir par exemple la réponse de Yao Wenyuan à l'argument « *Aimer le confort et détester le travail est dans la nature humaine* » dans son texte *Réfuter la théorie selon laquelle "le communisme engendre la paresse"* (23 octobre 1958)